

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



Grado en Ingeniería de Tecnologías y
Servicios de Telecomunicación

TRABAJO FIN DE GRADO

**ESTUDIO DE SIMETRÍAS NO
CONVENCIONALES EN GUÍA DE ONDA
PARA SU APLICACIÓN EN DISPOSITIVOS
DE COMUNICACIONES CON
POLARIZACIÓN CIRCULAR**

Autor: Ginés García Contreras

Tutor: Jorge Alfonso Ruiz Cruz

Junio 2019

ESTUDIO DE SIMETRÍAS NO CONVENCIONALES EN GUÍA DE ONDA PARA SU APLICACIÓN EN DISPOSITIVOS DE COMUNICACIONES CON POLARIZACIÓN CIRCULAR

Autor: Ginés García Contreras
Tutor: Jorge Alfonso Ruiz Cruz

Grupo RadioFrecuencias: Circuitos, Antenas y Sistemas (RFCAS)
Dpto. de Tecnología Electrónica y de las Comunicaciones
Escuela Politécnica Superior
Universidad Autónoma de Madrid
Junio 2019

Resumen

Las guías de onda son muy utilizadas en aplicaciones con bajas pérdidas y muy altas frecuencias en los sistemas de comunicaciones, ámbito en el que se han desarrollado recientemente arquitecturas como el 5G (quinta generación de comunicaciones móviles, bandas en 3.7 GHz y 25 GHz), el sistema de posicionamiento por satélite europeo «Galileo» (que opera en varias bandas, en torno a 1.4 GHz y 5 GHz); y las comunicaciones inalámbricas locales de alta velocidad, mediante el estándar IEEE 802.11a (comercialmente, WiFi) a 5 GHz. Entre las guías de onda más estudiadas y empleadas a día de hoy en este tipo de sistemas están las de geometría rectangular y circular, con propiedades muy conocidas. Sin embargo, se pueden diseñar infinitas formas de secciones transversales en esta tecnología, que implican efectos distintos sobre los campos que se propagan en ellas y pueden ser de utilidad en la elaboración de los dispositivos hardware que conforman dichos sistemas de comunicaciones, como filtros, polarizadores o acopladores.

En este trabajo se pone el foco en geometrías de guías de onda con simetrías no convencionales, como la de rotación por un ángulo de $360/N$ grados, siendo N un número entero. Se muestra cómo el campo en todas las guías de onda con esta propiedad se puede expresar como funciones con simetría de rotación y un desfase agregado. Mediante el estudio de los campos analíticos, se propone una nueva categorización de los modos TE y TM (Transversales Eléctricos y Transversales Magnéticos) para las guías canónicas según las combinaciones de modos que dan este tipo de simetría y el desfase con el que lo cumplen. Luego, se extiende el estudio a otras guías menos convencionales, con soluciones numéricas, como las que tienen simetrías de rotación de orden superior o carecen de invariancia de reflexión. Por último se analizan múltiples estructuras con las geometrías que se han caracterizado previamente, que se aplican al diseño de dispositivos para sistemas de comunicaciones, centrándose en el efecto que tiene sobre ellas sus propiedades de simetría de rotación.

Palabras Clave

Dispositivos en guía de onda para sistemas de comunicaciones, microondas, ondas milimétricas, teoría de campos de ondas guiadas, guías de onda con dos planos de simetría, guías con simetría C_N .

Abstract

Waveguides are commonly used in applications designed for low losses and very high frequencies in the communication systems, field in which many new architectures are being deployed constantly, such as 5G (fifth generation of Mobile Communications, in the band of 3.7 GHz and 25 GHz), the European satellite positioning system “Galileo”, with two bands reserved at 1.4 GHz and 5 GHz; and high speed local wireless communications using the standard IEEE 802.11a (usually branded as Wi-Fi), at 5 GHz. In these systems, some of the most used geometries in waveguides are the ones with rectangular and circular section, which have well known properties. In spite of this, an infinite number of transversal sections could be designed in this technology, which would imply different effects over the electromagnetic fields propagating in them, that can be of use in the fabrication of hardware devices such as filters, polarizers or couplers.

In this study the focus is put on waveguides with unconventional symmetries in their geometry, such as the one defined by a fixed-angle rotation of $360/N$ degrees, N being an integer. It is shown how the fields in all waveguides with this property can be expressed as functions with a fixed-angle rotation symmetry and a phase difference. By studding the analytic fields, a way of categorizing the electromagnetic modes (Transversal Electric and Transversal Magnetic, TE and TM) by their symmetry is proposed in the canonical waveguides. After this step, the analysis is extended to more unconventional waveguides, with more than 4 planes of symmetry or with axial symmetry absence. In the last part, some structures with the previously characterized symmetries are analyzed and then used for the design of communication system devices, applying the knowledge that was earlier unveiled and focusing on their rotation properties.

Key words

Waveguide Devices for Communication Systems, Microwaves, Milimetter-waves, Field Theory of guided Waves, TE and TM modes, Waveguides with Two Symmetry Planes, Waves with Symmetry C_N .

Índice general

Índice de Figuras	x
Índice de Tablas	xii
Glosario de acrónimos	xiii
1. Introducción	1
1.1. Motivación del proyecto	1
1.2. Objetivos y enfoque	2
1.3. Metodología y plan de trabajo	3
2. Estado del arte	5
2.1. Soluciones del campo EM en estructuras periódicas	5
2.1.1. Los modos TEM , TE y TM	5
2.1.2. Potencia y ortogonalidad de los modos	7
2.2. Condiciones de contorno de simetría de paredes eléctrica y magnética	8
2.3. Simetrías y rotaciones	9
2.3.1. Simetría del campo a lo largo de un eje	9
2.3.2. Rotación de orden N en torno a un eje	9
2.4. La polarización circular	10
2.4.1. Relación axial	11
2.5. Resolución de campos electromagnéticos mediante elementos finitos	11
2.6. La matriz de dispersión: Parámetros S	12
3. Estudio de las simetrías básicas en guías canónicas	13
3.1. Guía rectangular	13
3.1.1. Modos TE	13
3.1.2. Modos TM	15
3.2. Guía circular	16
3.2.1. Modos TE	16
3.2.2. Modos TM	18

3.2.3. Guía coaxial	18
3.3. Guía triangular equilátera	19
3.3.1. Modos TE y TM	19
3.4. Otras guías	20
4. Estudio de simetrías no convencionales en guías de onda	21
4.1. Desarrollo analítico – Introducción	21
4.2. Guía rectangular – Simetría C_2	21
4.2.1. Modos TM	22
4.2.2. Modos TE	22
4.3. Guía cuadrada – Simetría C_4	23
4.3.1. Modos TM	23
4.3.2. Modos TE	24
4.4. Guía triangular – Simetría C_3	25
4.4.1. Casos $m = n$	25
4.4.2. Casos $m \neq n$	26
4.5. Guía circular: C_∞	28
4.5.1. Modos TE y TM	28
4.5.2. Guía circular como C_4	28
4.6. Ortogonalidad de los modos C_N	29
4.7. Simulaciones numéricas sobre guías varias	29
4.7.1. Guías C_2 , C_3 y C_4	29
4.7.2. Guías C_5 y de mayor orden	29
4.7.3. Algunas conclusiones de las simulaciones	30
5. Dispositivos basados en simetrías no convencionales	31
5.1. Polarizador por desfase de modos	31
5.2. Inversor del ángulo de polarización en guía cuadrada	32
5.3. Modificador del ángulo de polarización en guía circular	34
5.4. Modificador del ángulo de polarización en guía triangular	35
6. Conclusiones y trabajo futuro	37
6.1. Conclusiones	37
6.2. Trabajo futuro	38
Bibliografía	40
A. Caso general de la polarización circular	I

B. Descripción de la guía coaxial	I
B.1. Modos TE y TM	I
C. Desarrollos teóricos adicionales	I
C.1. Desarrollo de sim. en modos TM para la guía cuadrada	I
C.2. Desarrollo de sim. en modos TE para la guía cuadrada	II
C.3. Desarrollo del caso $m = n$ para modos TM en guía triangular	IV
C.3.1. Modos TM_{nn}^S	IV
C.3.2. Modos TM_{nn}^A	IV
C.4. Desarrollo del caso $m = n + 3l$ en la guía triangular	V
C.5. Desarrollo del caso general de la guía triangular	VII
C.6. Guía circular como C_4	IX
C.6.1. Modos TM	X
D. Ortogonalidad de las combinaciones de modos	I
D.1. Obtención de la condición de ortogonalidad de los modos C_N	I
D.2. Guía cuadrada – C_4	II
D.3. Guía triangular – C_3	II
E. Resultados de simulaciones sobre varias guías	I
E.1. Notación	I
E.2. Guías C_2	II
E.3. Guías C_3	III
E.3.1. Modos TE y TM en guía triangular equilátera	III
E.3.2. Modos TE y TM en guía triangular recortada (equilátera)	IV
E.4. Guías C_4	V
E.4.1. Guía cuadrada recortada	VI
E.5. Guías C_5	VII
E.6. Guías C_6	VIII
E.7. Guías C_8	IX
F. Metodología de estudio de los dispositivos	I
F.1. Parámetros S de combinaciones de modos	I
G. Discusión sobre el modificador de ángulo en guía circular	I

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de dispositivos en guía de onda.	2
2.1. Sistema físico general.	6
2.2. Ejes de simetría en guía hexagonal.	9
2.3. Estructuras con simetría C_∞ , C_2 y C_3	10
2.4. Elipse general de polarización	11
2.5. Red genérica de 2 puertas o cuadripolo	12
2.6. Dispositivos en guías con secciones diversas.	12
3.1. Guía rectangular.	13
3.2. Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TE	14
3.3. Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TM	15
3.4. Guía circular.	16
3.5. Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TE	17
3.6. Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TM	18
3.7. Guía triangular.	19
3.8. Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos.	20
4.1. Guías con distintos tipos de simetrías analizadas en las simulaciones	30
5.1. Polarizadores basados en la combinación de TE_{10} y TE_{01}	31
5.2. Transmisión de los modos fundamentales y relación axial.	32
5.3. Dispositivo modificador del ángulo de polarización	32
5.4. Transmisión de potencia entre modos en función de la distancia entre láminas	33
5.5. Parámetro S_{21} del TE_{01+j10} a otros modos con según su grupo.	33
5.6. Parámetro S_{21} del TE_{11} a otros modos según su grupo.	33
5.7. Modificador ángulo de polarización sobre guía circular	34
5.8. Comportamiento del dispositivo para varios valores del ángulo de inclinación	34
5.9. Dispositivo modificador del ángulo de polarización	35
5.10. Comportamiento del dispositivo para varias distancias entre láminas.	35
5.11. Comportamiento del dispositivo para varias anchuras de láminas con modos C_3	36

5.12. Otras posibilidades para modificadores del ángulo de polarización.	36
B.1. Guía coaxial.	I
E.1. Sección transversal de la guía elíptica	II
E.2. Sección transversal de la guía triangular	III
E.3. Sección transversal de la guía triangular recortada	IV
E.4. Sección transversal de la guía cuadrada	V
E.5. Sección transversal de la guía cuadrada recortada	VI
E.6. Sección transversal de la guía pentagonal	VII
E.7. Sección transversal de la guía de 6 lados	VIII
E.8. Sección transversal de la guía octogonal	IX
G.1. Modificador del ángulo de polarización	I
G.2. Resultados recogidos en el artículo	II
G.3. Modificador del ángulo de polarización	II

Índice de cuadros

3.1. Paredes de los modos TE y TM en guía rectangular.	15
3.2. Paredes de los modos TE en la guía circular.	17
3.3. Paredes de los modos TM en la guía circular.	18
3.4. Paredes de los modos TE en la guía triangular.	20
3.5. Paredes de los modos TM en la guía triangular.	20
4.1. Modos TE y TM con simetría C_2 en guía rectangular según su q	22
4.2. Combinaciones de modos TM con simetría C_4	24
4.3. Combinaciones de modos TE con simetría C_4	24
4.4. Relación entre paredes y valores de q para la guía cuadrada.	24
4.5. Grupos de modos TE y TM según su valor de q en la guía triangular.	27
4.6. Combinaciones de modos TE y TM en guía circular estudiada como C_4	28
4.7. Propuesta de categorización modos TE y TM en guía pentagonal.	30
C.1. Combinaciones de modos TE con simetría C_4	III
C.2. Coeficientes de ψ_h^S en θ	V
C.3. Coeficientes de ψ_h^S en θ'	V
C.4. Coeficientes de ψ_h en θ	VII
C.5. Coeficientes de ψ_h en $\theta + 2\pi/3$	VIII
C.6. Grupos de modos TE según su valor de q en la guía triangular.	IX
C.7. Combinaciones de modos TE en guía circular estudiada como C_4	X
E.1. Modos TE en guía elíptica por frecuencia de corte.	II
E.2. Modos TM en guía elíptica por frecuencia de corte.	II
E.3. Modos TE en guía triangular por frecuencia de corte.	III
E.4. Modos TM en guía triangular por frecuencia de corte.	III
E.5. Modos TE en guía triangular recortada por frecuencia de corte.	IV
E.6. Modos TM en guía triangular recortada por frecuencia de corte.	IV
E.7. Modos TE en guía cuadrada por frecuencia de corte.	V
E.8. Modos TM en guía cuadrada por frecuencia de corte.	V
E.9. Modos TE en guía cuadrada recortada por frecuencia de corte.	VI

E.10.Modos TM en guía cuadrada recortada por frecuencia de corte.	VI
E.11.Modos TE en guía pentagonal por frecuencia de corte.	VII
E.12.Modos TM en guía pentagonal por frecuencia de corte.	VII
E.13.Modos TE en guía en estrella de 6 puntas por frecuencia de corte.	VIII
E.14.Modos TM en guía en estrella de 6 puntas por frecuencia de corte.	VIII
E.15.Modos TE en guía octogonal por frecuencia de corte.	IX
E.16.Modos TM en guía octogonal por frecuencia de corte.	IX

Glosario de acrónimos

- **EM:** Electromagnético
- **FEM:** Finite Method for Electromagnetics
- **OMT:** Orthogonal Mode Transducer
- **PEW:** Perfect Electric Wall
- **PMW:** Perfect Magnetic Wall
- **RADAR:** Radio Detection and Ranging
- **RF:** Radiofrecuencia
- **SHF:** Super High Frequency
- **SI:** Sistema Internacional de Unidades de Medida
- **TE:** Transversal Eléctrico
- **TEM:** Transversal Electromagnético
- **TIC:** Tecnologías de la Información y la Comunicación
- **TM:** Transversal Magnético

1

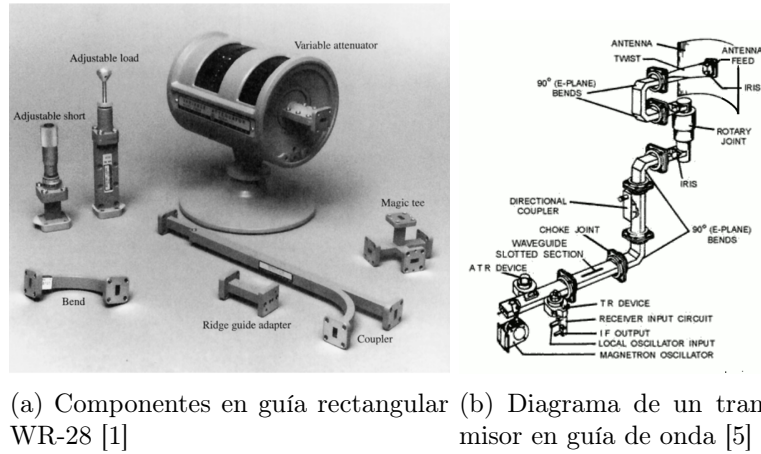
Introducción

1.1. Motivación del proyecto

El enorme desarrollo de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en las últimas décadas ha sido en gran parte debido a la extensiva investigación realizada en lo que se denominan sistemas de comunicaciones, que permiten el intercambio de información a altas velocidades entre lugares distantes en el espacio mediante ondas electromagnéticas. Algunos de los factores determinantes en este desarrollo han sido los estudios en teoría de la información y comunicación, el avance de la electrónica y, por supuesto, el estudio del electromagnetismo aplicado a este tipo de sistemas, que a fin de cuentas posibilita el uso de los medios físicos como transmisores de información.

Los primeros sistemas de Radiofrecuencia (RF) se basaban en guías de onda, líneas de dos cables y coaxiales [1]. Las guías de onda (figura 1.1a,b) tienen la ventaja de aguantar altas potencias con bajas pérdidas, a cambio de ser grandes, especialmente a bajas frecuencias, y caras en su fabricación. Las líneas de dos cables son baratas pero carecen de protección y rigidez para muchas aplicaciones y las coaxiales son, en general, problemáticas a la hora de fabricar dispositivos sobre ellas. Las tecnologías planares como la microstrip son compactas, baratas y tienen la facilidad de ser integrables con otros dispositivos circuitales, pero están sujetas a mayores pérdidas, sobre todo a altas frecuencias.

No en vano, en el mundo de las telecomunicaciones ha habido cierta tendencia a la ocupación de bandas de frecuencia cada vez más altas, actualmente del orden de las decenas gigahercios (GHz), especialmente en aplicaciones inalámbricas. Un ejemplo de esto son las recientes adjudicaciones de las banda 3,6 a 3,8 GHz, destinadas a aplicaciones 5G (quinta generación de comunicaciones móviles) [2], que se usarán junto a la de 24,25 a 27,5 GHz [3] en el futuro. Otro ejemplo de sistema de comunicación en proceso de implantación es nuevo servicio de geolocalización europeo «Galileo», que funciona principalmente en bandas de 1.364 a 1.5 GHz y de 5 a 5.3 GHz [4]. La fabricación de dispositivos para estas frecuencias, además de implicar una reducción en el tamaño de los componentes, es necesaria para evitar el solapamiento espectral con otros servicios ya existentes, que tienen bandas ya asignadas por los gobiernos.



(a) Componentes en guía rectangular (b) Diagrama de un transmisor en guía de onda [5]

Figura 1.1: Ejemplos de dispositivos en guía de onda.

No obstante, el uso de la banda de SHF (Super High Frequency, de 3 a 30 GHz) trae consigo importantes desventajas como la imposibilidad de hacer procesamiento digital de la información, así como la dificultad de fabricación, poca fiabilidad, degradación de prestaciones y alto coste de muchos componentes electrónicos «clásicos» o concentrados como bobinas y condensadores.

Efectivamente, el espectro de radiofrecuencias padece ya de cierta saturación, por lo que otro reto que se plantea en los sistemas de comunicación consiste en maximizar la cantidad de información que se transmite en una banda. Una de las formas de conseguir una mejora significativa es empleando «polarización circular», que es una técnica de transmisión de los campos electromagnéticos de especial importancia en sistemas como las comunicaciones por satélite y RADAR (Radio Detection and Ranging), ya que para los primeros consigue reducir las pérdidas por ciertos fenómenos físicos y para los segundos permite lograr una mayor robustez frente a la atenuación de la lluvia [6]. Esta polarización puede emplearse para enviar el doble de información en el mismo ancho de espectro, gracias a las propiedades de ortogonalidad de las señales.

Por tanto, es interesante el estudio de diversas geometrías y dispositivos en guías de onda, puesto que las propiedades de los campos que aparecen en ellas las pueden hacer de utilidad en multitud de aplicaciones en las que se buscan soluciones robustas y con pocas pérdidas, a muy altas frecuencias, en las que sus dimensiones sean razonables y no se pueda emplear la electrónica convencional.

1.2. Objetivos y enfoque

Este trabajo se centrará en el análisis de guías de onda con simetrías no convencionales, como las definidas por la rotación de la sección de la estructura un ángulo de $360/N$ grados, siendo N un número entero, que se verán más adelante (ver como ejemplo la figura 2.3). La guía triangular equilátera sería un ejemplo de estas, ya que es invariante al giro de su sección por un ángulo de 120 grados, que se pretende extender a otras geometrías, cuyos modos no son analíticos. El objetivo es hacer una caracterización eficiente de estas guías, para su aplicación en sistemas receptores o transmisores de microondas que trabajen con doble polarización circular, estudiando sus características en términos como ancho de banda, adaptación, relación axial, etc.

Para hacer el análisis se parte, siempre que sea posible, de las soluciones, obtenidas de manera analítica (preferentemente) o numérica, de los campos que tienen estas guías. Estas soluciones son los denominados modos, que en guía de onda homogénea (con un único dieléctrico) se denominan Transversales Eléctricos (TE), Transversales Magnéticos (TM), o Transversales Electromagnéticos (TEM) si tuvieran varios conductores. Para los casos en los que sea necesario realizar un análisis numérico, se empleará un software de resolución de campos desarrollado por el grupo de investigación RFCAS de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Autónoma de Madrid, y el software comercial CST (Computer Simulation Technology) desarrollado por Dassault Systemes Deutschland GmbH[7].

1.3. Metodología y plan de trabajo

En primer lugar se hace un estudio de las simetrías básicas en guías canónicas [capítulo 3], lo que sirve de punto de partida para el análisis de simetrías no convencionales. Luego se continuará trabajando con las expresiones analíticas existentes [capítulo 4] para un conjunto de guías, sobre las que se harán unas demostraciones que justifican cómo se pueden construir campos electromagnéticos con simetría de rotación para ciertos ángulos. Una vez hecho esto, se acabará de justificar las propiedades de la nueva base de modos [sección 4.6]. Luego se pasará al análisis de más guías con simetrías poco convencionales, de las que se extraen varias conclusiones [sección 4.7].

Por último, se pasará a un apartado de dispositivos para el front-end de los sistemas de microondas [capítulo 5], con el estudio de algunas estructuras propuestas en varios artículos muy recientes, aplicando la metodología desarrollada anteriormente y justificando su interés, así como resaltando los parámetros más significativos de cada diseño.

2

Estado del arte

El análisis de las guías de onda parte de las ecuaciones que el físico y matemático James Clerk Maxwell publicó en 1865 resumiendo los conocimientos del electromagnetismo conocidos hasta entonces, hoy denominado «clásico» o macroscópico. De estas ecuaciones son de las que se deduce la aparición de ondas electromagnéticas bajo ciertas circunstancias, que son sobre las que se construye la teoría de los sistemas de comunicaciones actuales. La naturaleza de estos campos está extensamente estudiada y puede consultarse en [8], [1]. En los desarrollos de este trabajo aparecen únicamente dos campos vectoriales: El \vec{E} o vector intensidad del campo eléctrico, y el \vec{H} , vector intensidad del campo magnético, que en las situaciones que se estudian sirven para caracterizar la totalidad del campo electromagnético (EM). Las unidades del SI (Sistema Internacional de Unidades de Medida) para el primero son $[V/m]$, y para el segundo $[A/m]$.

2.1. Soluciones del campo EM en estructuras periódicas

Las guías de onda se estudian como estructuras sin variación longitudinal, es decir, con simetría de traslación a lo largo de un eje, que en todo los desarrollos se considerará el z . Estos campos se categorizan en distintos tipos de soluciones y tienen unas propiedades importantes que se procederá a enumerar. Se consideran siempre guías sin pérdidas, con paredes de conductores perfectos y rellenas por un material dieléctrico homogéneo. Estas guías son muy comunes, y son ejemplos de ellas las que aparecen en la figura 1.1.

2.1.1. Los modos TEM , TE y TM

La resolución del problema electromagnético en las guías de onda da lugar a diferentes tipos de campos que se categorizan según sea su componente longitudinal. Si la estructura tiene simetría de traslación según el eje z , se pueden dar cuatro casos:

$$E_z = 0 \quad \text{y} \quad H_z = 0, \quad (2.1)$$

$$E_z = 0 \quad \text{y} \quad H_z \neq 0, \quad (2.2)$$

$$E_z \neq 0 \quad \text{y} \quad H_z = 0, \quad (2.3)$$

$$E_z \neq 0 \quad \text{y} \quad H_z \neq 0. \quad (2.4)$$

Las soluciones de los campos que cumplan la primera condición se denominan Transversales Electromagnéticas o *TEM*, las que cumplen la segunda Transversales Eléctricas o *TE* y las que satisfacen la tercera transversales Magnéticos o *TM*. La cuarta expresión lleva a soluciones denominadas híbridas que no aparecen en las guías de onda homogéneas y por tanto no serán estudiadas. Para que existan soluciones *TE* y *TM* debe haber en la estructura al menos un conductor, y para que aparezcan *TEM* deben existir al menos dos conductores separados por un dieléctrico.

Los modos *TEM* se pueden obtener analíticamente a partir de una función potencial eléctrico Φ , que debe satisfacer la ecuación de Laplace (2.5). En este trabajo no se analizan modos *TEM*, aunque aparecen puntualmente en el estudio de coaxiales (Anexo B).

$$\nabla_t^2 \Phi(u_1, u_2) = 0. \quad (2.5)$$

Aquí el operador ∇_t^2 es el laplaciano «transversal» (en dos dimensiones) de la función, que desglosado es:

$$\nabla_t^2 f = (\nabla \cdot \nabla) f = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 \partial f}{h_1 \partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 \partial f}{h_2 \partial u_2} \right) \right), \quad (2.6)$$

donde \hat{u}_1, \hat{u}_2 son vectores ortogonales de un sistema de coordenadas curvilíneo [9] (figura 2.1a), y h_1, h_2 factores de escala que dependen de dichos vectores. Los sistemas de coordenadas que aparecerán en este trabajo no cambian su forma con la coordenada longitudinal y , por tanto, $\hat{u}_3 = \hat{z}$. La figura 2.1b es una guía genérica, con una sección S , rodeada completamente por un conductor perfecto con conductividad σ infinita y con un dieléctrico en su interior, ampliamente estudiada en [8],[1], donde la descripción matemática completa se puede consultar (aquí solo se incluyen los resultados necesarios para los próximos capítulos).

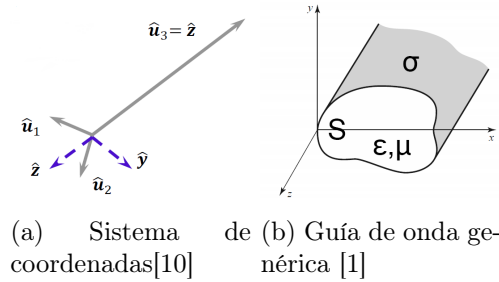


Figura 2.1: Sistema físico general.

Por otro lado los campos de los modos *TE* y *TM* se pueden expresar en base a funciones $\psi_{e,h}$, utilizadas en las secciones posteriores como el capítulo 3, que tampoco depende de la coordenada longitudinal y que deben satisfacer, respectivamente:

$$(\nabla_t^2 + k_c^2) \psi_h = 0, \quad (2.7)$$

$$(\nabla_t^2 + k_c^2) \psi_e = 0, \quad (2.8)$$

donde k_c se denomina el número de onda del modo y es una constante real diferente para cada solución [1]. A partir de estas funciones se pueden obtener todas las componentes de los campos de la siguiente forma, siguiendo la nomenclatura de [8]:

Para los modos *TE*:

$$\vec{H}_t = \pm \Gamma e^{\pm \Gamma z} \nabla_t \psi_h, \quad (2.9)$$

$$H_z = -\nabla_t^2 \psi_h e^{\pm \Gamma z} = k_c^2 \psi_h e^{\pm \Gamma z}, \quad (2.10)$$

$$\vec{E} = \pm Z_h \hat{z} \times \vec{H}_t; \quad (2.11)$$

y para los modos TM :

$$\vec{E}_t = \pm \Gamma e^{\pm \Gamma z} \nabla_t \psi_e, \quad (2.12)$$

$$E_z = -\nabla_t^2 \psi_e e^{\pm \Gamma z} = k_c^2 \psi_e e^{\pm \Gamma z}, \quad (2.13)$$

$$\vec{H} = \mp Y_e \hat{z} \times \vec{E}_t. \quad (2.14)$$

Γ es la constante de propagación compleja, que se puede escribir como

$$\Gamma = \sqrt{k_c^2 - k_0^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad [m^{-1}], \quad (2.15)$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio, en $[H/m]$ y ϵ la permitividad eléctrica, con unidades de $[F/m]$, que caracterizan el dieléctrico del interior de la guía. Estos toman valores reales dependientes de la frecuencia en los medios sin pérdidas. Cuando el resultado de esta ecuación es un número imaginario entonces el campo se propaga y en las ecuaciones de los campos se toman las soluciones con el signo de la línea superior (en el caso TE , todas las ecuaciones con $+$). Si el resultado es un número real, el campo no se propaga y se escogen las ecuaciones con los signos de inferiores (en los TE , con $-$). De esta constante se deduce que la velocidad de propagación de los modos depende de la frecuencia, y que cada modo se propagará a una velocidad distinta salvo los que tienen k_c iguales. El mismo criterio de signos se sigue en el capítulo 3.

Por otro lado están las impedancias y admitancias de onda, que se pueden escribir respectivamente como

$$Z_h = \frac{jk_0}{\Gamma} \eta \quad [\Omega], \quad (2.16)$$

$$Y_e = \frac{jk_0}{\Gamma \eta} \quad [S], \quad (2.17)$$

donde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, con unidades de $[\Omega]$, es la impedancia característica del medio. Un resultado importante de estas expresiones junto con (2.9) y (2.12) y del que se hará uso en el estudio es que los campos \vec{E}_t y \vec{H}_t son ortogonales entre sí, y por tanto, si se demuestra una propiedad geométrica para uno se habrá demostrado para el otro.

2.1.2. Potencia y ortogonalidad de los modos

El valor medio de la densidad de potencia del campo EM la da el denominado Teorema de Poynting. Se puede escribir de la siguiente forma, que particularizada para los modos TE es:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \Re (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) = S_z \hat{z} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]. \quad (2.18)$$

Para los modos TM se tendría \vec{H}_t y \vec{E} , y por tanto el vector resultado también sería en dirección \hat{z} , es decir la longitudinal. Por tanto, para las soluciones de los campos en guía de onda solo se transmite potencia en esta dirección. Este es el valor que se representa en figuras como la 3.2.

La potencia media transmitida por un modo TE o TM se puede definir entonces como:

$$P = \frac{1}{2} \Re \left(\iint_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{z} dS \right) = \frac{1}{2} \Re \left(\iint_S \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* \cdot \hat{z} dS \right) \quad [W], \quad (2.19)$$

donde S es la superficie de la sección transversal de la guía encerrada por el conductor perfecto. Por otro lado se puede demostrar [8] que para dos modos diferentes i y j con constante de propagación distinta:

$$\iint_S \vec{E}_i \times \vec{H}_j^* \cdot \hat{z} dS = 0, \quad (2.20)$$

que es lo que se define como propiedad de ortogonalidad de los modos en potencia (en [8] también se demuestra el mismo tipo de relación sin el conjugado). Para modos con constantes de propagación iguales, también denominados «degenerados», se pueden hallar campos \vec{E} y \vec{H} que cumplen esta condición. Las funciones generadoras que veremos más adelante en el capítulo 3 garantizan esta propiedad. De ortogonalidad se vuelve a hablar en la sección 4.6.

Por tanto, se pueden considerar los modos como una base de funciones ortogonales que sirven para expresar el campo total a través de una guía de onda de la siguiente forma (donde los C_i son constantes complejas):

$$\begin{cases} \vec{E}_{tot} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \vec{E}_i \\ \vec{H}_{tot} = \sum_{i=1}^{\infty} C'_i \vec{H}_i. \end{cases} \quad (2.21)$$

2.2. Condiciones de contorno de simetría de paredes eléctrica y magnética

El concepto de pared eléctrica es muy empleado en la resolución de problemas electromagnéticos y, en particular, en este trabajo, como se verá en los temas posteriores, para clasificar los modos en el capítulo 3. Al aplicar las condiciones de contorno que se derivan de las leyes de Maxwell sobre la interfaz entre un material dieléctrico y conductor [8] se obtienen las siguientes condiciones para los campos:

$$\begin{cases} \left(\hat{n} \times \vec{E} \right) \Big|_S = 0 \\ \left(\hat{n} \cdot \vec{H} \right) \Big|_S = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde \hat{n} es el vector normal a la superficie S . De la primera se deduce que el campo \vec{E} en S debe ser normal (perpendicular) a la superficie, y de la segunda que \vec{H} es transversal (paralelo) a la misma.

A partir de estas condiciones se define el concepto de pared eléctrica perfecta (PEW - Perfect Electric Wall) como cualquier superficie S en la que se cumple (2.22), independientemente de que haya o no un paso de un medio a otro.

De forma dual a la anterior, se define la pared magnética perfecta (PMW - Perfect Magnetic Wall) como aquellas superficies en las que se cumple:

$$\begin{cases} \left(\hat{n} \times \vec{H} \right) \Big|_S = 0 \\ \left(\hat{n} \cdot \vec{E} \right) \Big|_S = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Se deriva que en este caso el campo \vec{H} será normal a S en esta superficie y el \vec{E} transversal. Estos conceptos de paredes serán utilizados en el análisis de las guías según su simetría como, por ejemplo, en el cuadro 3.1.

2.3. Simetrías y rotaciones

2.3.1. Simetría del campo a lo largo de un eje

La simetría de un campo electromagnético a lo largo de un eje de simetría física de una estructura de transmisión, como por ejemplo $x = 0$ tiene unas ciertas implicaciones para los campos, que se pueden resumir como [11]:

$$\begin{cases} \pm E_x(x, y, z) &= -E_x(-x, y, z) \\ \pm E_{y,z}(x, y, z) &= E_{y,z}(-x, y, z) \\ \pm H_x(x, y, z) &= H_x(-x, y, z) \\ \pm H_{y,z}(x, y, z) &= -H_{y,z}(-x, y, z). \end{cases} \quad (2.24)$$

Aplicar estas condiciones implica que en el eje de simetría tendremos pared magnética perfecta en el primer caso (con $+$) y eléctrica en el segundo (con $-$). Otra notación utilizada es denominar al campo simétrico cuando la pared es magnética y asimétrico cuando es eléctrica.

En las estructuras que tienen simetrías habrá paredes eléctricas y magnéticas en sus ejes, si la estructura tiene además alguna simetría de traslación o rotación, entonces solo existirán paredes eléctrica o magnética en aquellos ejes que sean invariantes respecto a una simetría.

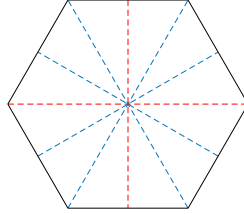


Figura 2.2: Ejes de simetría en guía hexagonal.

Esto se detalla más como ejemplo en la figura 2.2, donde se resalta en rojo el par de ejes invariantes respecto de la reflexión por la línea horizontal. En esta estructura se dan, por tanto, siempre al menos dos paredes (eléctricas, magnéticas o una de cada) para todos los modos. En general, las estructuras con dos ejes de simetría perpendiculares tendrán dos paredes perfectas, y las que solo tengan uno dispondrán de una sola pared. Si la estructura no tiene ejes de simetría, no se puede garantizar que el campo vaya a tener ningún tipo de pared perfecta en su disposición.

2.3.2. Rotación de orden N en torno a un eje

La rotación de la sección transversal de una estructura alrededor del eje z un ángulo $\alpha_N = 2\pi/N$ se realiza a través del operador C_N cuyos autovalores para los campos EM están determinados por la expresión:

$$\lambda = e^{\frac{-j2\pi q}{N}}; \quad -N/2 < q \leq N/2 \quad (2.25)$$

Esto quiere decir, en coordenadas cilíndricas, que:

$$\vec{E}\left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{N}, z\right) = e^{\frac{-j2\pi q}{N}} \vec{E}(\rho, \theta, z) \quad (2.26)$$

$$\vec{H}\left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{N}, z\right) = e^{\frac{-j2\pi q}{N}} \vec{H}(\rho, \theta, z) \quad (2.27)$$

Esta propuesta está directamente recogida de [11] y es sobre la que se trabaja en el capítulo 4. Se dirá que los campos tienen simetría de rotación de orden N para una q determinada si cumplen las expresiones anteriores para dicho valor de q . Los valores de q se pueden expresar en otros rangos, como, por ejemplo $0 \leq q < N$, aunque se ha elegido el de (2.25) porque si los vectores \vec{E} y \vec{H} corresponden a una solución para un q determinado, entonces el número $-q$ corresponde a la solución conjugada \vec{E}^* y \vec{H}^* . Ambos campos satisfacen las ecuaciones de Maxwell y condiciones de contorno para la misma frecuencia, y por tanto, son degenerados. Algunos ejemplos de guías C_N son las que aparecen en la figura 2.3. Se observa que su sección es invariante a la rotación por un ángulo de $2\pi/N$.

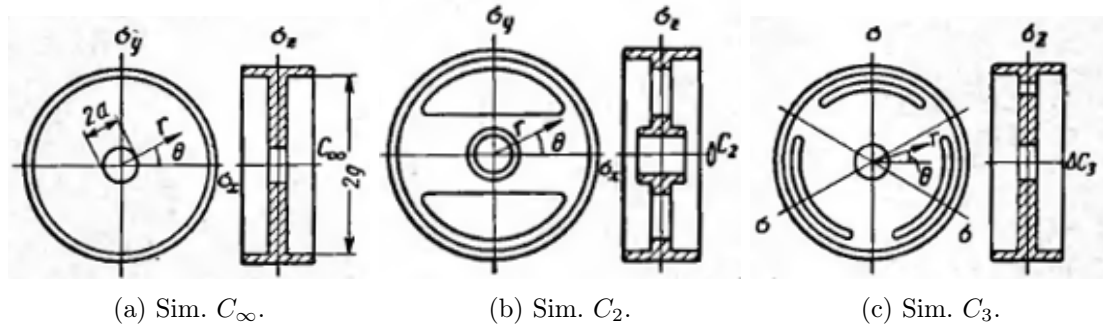


Figura 2.3: Estructuras con simetría C_∞ , C_2 y C_3 [11].

Es posible expresar la condición de simetría C_N en coordenadas cartesianas. Por ejemplo, para C_4 , la expresión es la siguiente, recogida de [12]

$$\vec{E}_1(x_1, y_1, z) = e^{jq\pi/2} C_4 \vec{E}_0(x_0, y_0, z) \quad (2.28)$$

donde

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Esta expresión ilustra el concepto de cómo el campo es igual, salvo por un desfase, en la estructura si es rotada $2\pi/N$ radianes.

2.4. La polarización circular

El fenómeno de la polarización circular aparece cuando los vectores de los campos \vec{E} y \vec{H} describen una circunferencia alrededor de un eje en función del tiempo [13] como reproduce de forma más genérica la figura 2.4. Esto, en frecuencia, se traduce en que, si el campo se puede expresar como suma de vectores ortogonales defasados 90 grados o j con la misma amplitud, entonces se dará este tipo de polarización. Si es \vec{E} de la forma:

$$\vec{E} = a\hat{x} + jb\hat{y}, \quad (2.30)$$

donde a y b son números reales, su expresión en el tiempo será:

$$\vec{E} = a \cos(\omega_0 t - \beta z) \hat{x} - b \sin(\omega_0 t - \beta z) \hat{y}. \quad (2.31)$$

Aquí ω_0 es la pulsación y β es la parte imaginaria de la constante Γ que aparecía en la sección 2.1 (en propagación sin pérdidas Γ es imaginaria pura). Esta expresión se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\left(\frac{E_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{b}\right)^2 = 1, \quad (2.32)$$

que es precisamente la definición matemática de una elipse. Si $a = b$, entonces el campo definirá una circunferencia y por tanto la polarización será circular.

2.4.1. Relación axial

La relación axial permite evaluar la calidad de la polarización, como posteriormente se hace en la sección 5.1. Se define como:

$$ar = \frac{E(t)_{\text{semieje mayor}}}{E(t)_{\text{semieje menor}}} = \frac{|\vec{b}_1|}{|\vec{b}_2|}, \quad (2.33)$$

donde

$$\vec{b}_1 = \Re(\vec{b}), \quad \vec{b}_2 = \Im(\vec{b}). \quad (2.34)$$

Aquí \vec{b} es un vector que define en base al campo original \vec{E}_0 y una fase Ψ :

$$\vec{b} = \vec{E}_0 e^{-j\Psi}, \quad (2.35)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \angle (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0), \quad (2.36)$$

donde \angle indica fase del argumento entre paréntesis. El desarrollo del caso general de la polarización del campo se encuentra en el anexo A.

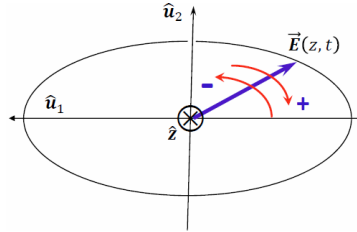


Figura 2.4: Elipse general de polarización [14].

2.5. Resolución de campos electromagnéticos mediante elementos finitos

En el trabajo, habrá que abordar problemas sin soluciones analíticas mediante métodos numéricos. La resolución de los campos electromagnéticos para guías sin soluciones analíticas debe realizarse mediante algoritmos computables, es decir, con discretización de los problemas. El procedimiento que se suele aplicar es el siguiente, extraído de [15]

1. Se subdivide la región a analizar en elementos no solapados.
2. Se aproxima la función desconocida en cada uno de los elementos.
3. Se definen funciones de ponderación y se expresa el residuo de cada elemento.
4. Se agregan las contribuciones de todos los elementos para obtener el residuo en todo el dominio
5. Se elimina el residuo y se resuelve el problema generalizado del autovalor

Para el paso tercero se suele aplicar el Método de Ponderaciones Residuales, o WRM por sus siglas en inglés. El autovalor al que hacer referencia el quinto paso es el k_c que es el número de onda de corte del modo estudiado. Este método es el que se aplica para resolver los campos de la sección 4.7.

2.6. La matriz de dispersión: Parámetros S

Debido a la dificultad para definir corrientes y tensiones en dispositivos con modos TE y TM, Vitold Belevitch inventó en 1945 el concepto de los parámetros S o de dispersión, que fueron popularizados por Kaneyuki Kurokawa en la década de los años 60 del siglo pasado. Su utilidad reside en permitir el análisis de redes multipuerto a través de una matriz $[S]$ que relaciona ondas de potencia incidentes (a_i) y reflejadas (b_i), con unidades de $[\sqrt{W}]$ [16][1] (ver figura 2.5).

$$b = [S] a, \quad (2.37)$$

donde b y a son vectores columna de las ondas reflejadas e incidentes respectivamente. Así, cada parámetro s , por tanto es:

$$s_{ij} = \frac{b_i}{a_j}. \quad (2.38)$$

Es decir, la raíz de la relación entre la potencia que sale por el puerto i al excitar la red por el puerto j . En las redes conformadas por guías de onda y elementos concentrados como bobinas, condensadores y resistencias, la matriz S es recíproca ($S = S^t$). En los estudios multimodo esta matriz se generaliza considerando $r \times s$ puertos eléctricos, donde r es el número de puertos físicos y s es el número de modos a estudiar en cada puerta física (aunque se podría considerar un número r_i distinto en cada puerta física). Los parámetros S desempeñan un papel fundamental en los análisis del capítulo 5.



Figura 2.5: Red genérica de 2 puertas o cuadripolo [17].

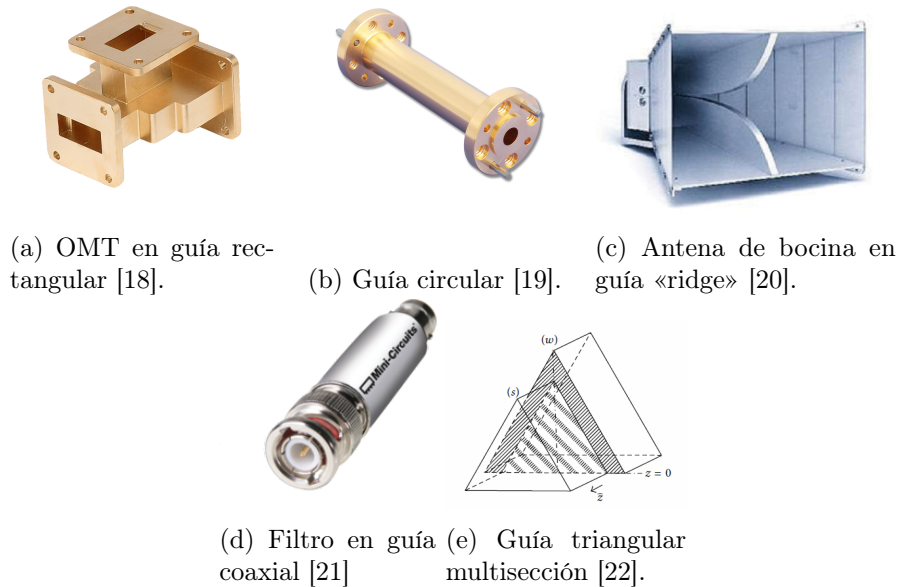


Figura 2.6: Dispositivos en guías con secciones diversas.

3

Estudio de las simetrías básicas en guías canónicas

Para abordar más adelante los casos de simetría no convencionales, se analizan en primera instancia las simetrías axiales en todas las guías canónicas que tienen soluciones analíticas (excepto la elíptica) y se identifican las paredes que cumplirán las condiciones de contorno para ser denominadas eléctrica o magnética, atendiendo a lo que se definió en la sección 2.2.

3.1. Guía rectangular

3.1.1. Modos TE

En el caso de la guía rectangular homogénea sin pérdidas la función generatriz de los modos TE_{mn} es:

$$\psi_h = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b, \quad (3.1)$$

donde m y n son números enteros mayores o iguales (como máximo uno de los dos) que 0. La expresión de la guía cuadrada es la misma con $a = b$. La sección se muestra en la figura 3.1. Un ejemplo de dispositivo (un transductor de modos ortogonales u OMT) en guía rectangular aparece en la figura 2.6a.

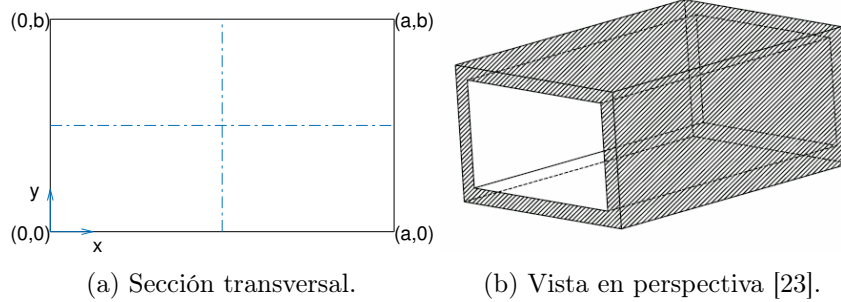


Figura 3.1: Guía rectangular.

Aplicando la expresión anterior en (2.9), se llega al campo transversal:

$$H_x = \mp \Gamma_{mn} e^{\Gamma_{mn} z} \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad (3.2)$$

$$H_y = \mp \Gamma_{mn} e^{\Gamma_{mn} z} \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right). \quad (3.3)$$

Si se particulariza en $x = a/2$ se obtiene:

$$H_x = \mp \Gamma_{mn} e^{\Gamma_{mn} z} \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right),$$

$$H_y = \mp \Gamma_{mn} e^{\Gamma_{mn} z} \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right).$$

Se observa que si n es par H_x es 0 (el seno se anula) y si n es impar H_y es 0 (desaparece el coseno). El mismo razonamiento se puede aplicar a $y = b/2$, en cuyo caso lo que sucedía para H_x ocurre para H_y y al contrario. Por tanto, y teniendo en cuenta la relación entre campos eléctrico y magnético antes descrita, para n par se tendrá $H_x = 0$ y $E_y = 0$ en $x = a/2$ (PEW), y para n impar $H_y = 0$ y $E_x = 0$ (PMW). Para m par en $y = b/2$ se darán las condiciones de PEW, y PMW en el caso de que sea impar. Se muestra un resumen en el cuadro 3.1, en la que «e» significa *even* o par y «o» *odd* impar. En la figura 3.2, realizada con los scripts de MATLAB desarrollados en este trabajo, se muestran algunos ejemplos de estas paredes virtuales en los ejes de simetría, indicados en línea discontinua.

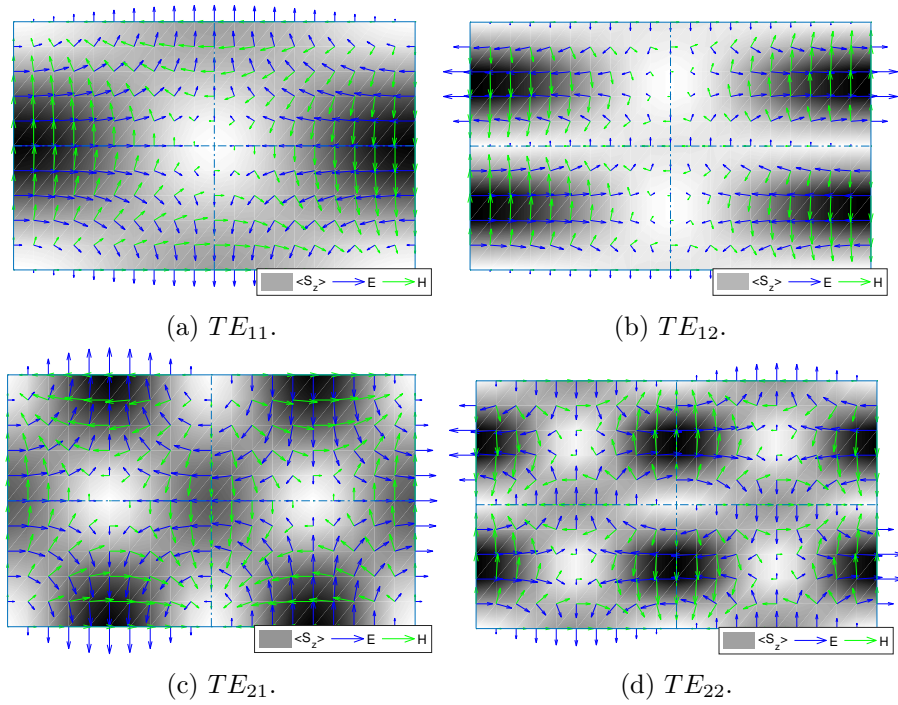


Figura 3.2: Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TE .

3.1.2. Modos TM

Para los modos TM se da una función generadora similar:

$$\psi_e = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right). \quad (3.4)$$

En este caso n y m tienen que ser números enteros positivos para que existan los campos.

A partir de esta función se obtendría el campo \vec{E} . Al deducirse a partir de una generatriz con senos en vez de cosenos se observa que la distribución de estos en los campos será la misma que la que se había obtenido para el campo \vec{H} de los modos TE , por lo que el resultado final es idéntico, y aplica lo que se muestra en el cuadro 3.1.

Modos $TE(M)_{mn}$	$x = a/2$	$y = b/2$	Simetría f. gen
m impar, n impar	PMW	PMW	$TE(M)_{ee}$
m impar, n par	PMW	PEW	$TE(M)_{eo}$
m par, n impar	PEW	PMW	$TE(M)_{oe}$
m par, n par	PEW	PEW	$TE(M)_{oo}$

Cuadro 3.1: Paredes de los modos TE y TM en guía rectangular.

En la figura 3.3 se muestran algunos ejemplos de estas paredes virtuales en los ejes de simetría, indicados en línea discontinua.

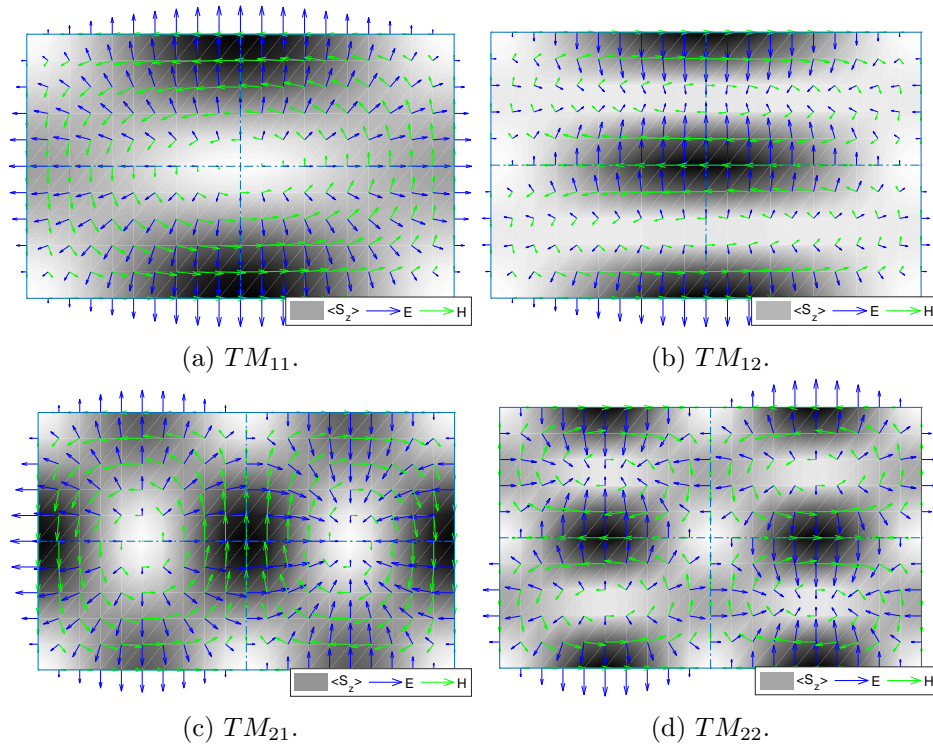


Figura 3.3: Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TM .

3.2. Guía circular

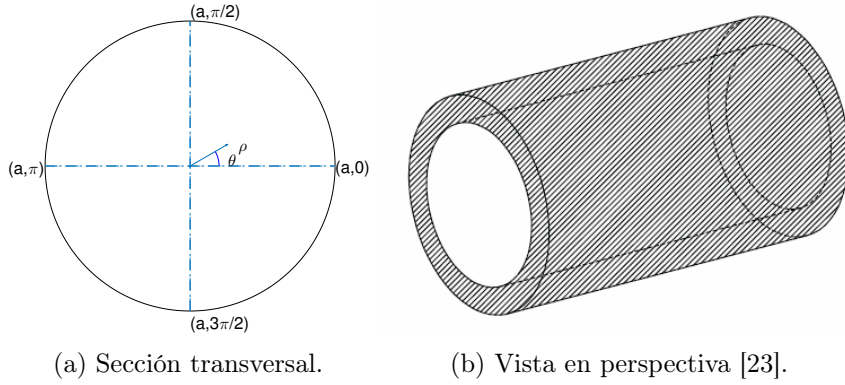


Figura 3.4: Guía circular.

3.2.1. Modos TE

En el caso de la guía de onda circular (figura 3.4) la función generatriz es, para los modos TE :

$$\psi_{h,mn} = J_n(k_{c,mn}\rho) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq a; 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (3.5)$$

donde J_n es la función de Bessel de primera especie y orden n ; y k_c es el número de onda de corte, que depende de la m -ésima raíz (el «cero») de la derivada de la función de Bessel de orden n . La llave hace significar que la función generadora es en realidad doble, con una familia de modos con la expresión del seno (TE^c) y otra con la del coseno (TE^s). Tras aplicar (2.9) se obtiene el campo transversal:

$$H_\rho = \pm \Gamma_{mn} e^{\pm \Gamma_{mn} z} k_{c,mn} J'_n(k_{c,mn}\rho) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}, \quad (3.6)$$

$$H_\theta = \pm \Gamma_{mn} e^{\pm \Gamma_{mn} z} \frac{J_n(k_{c,mn}\rho) n}{r} \begin{cases} \cos(n\theta) \\ -\sin(n\theta) \end{cases}. \quad (3.7)$$

Para analizar la pared $x = 0$ se particulariza la función en $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. En $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} H_\rho &= \pm \Gamma_{mn} e^{\pm \Gamma_{mn} z} k_{c,mn} J'_n(k_{c,mn}\rho) \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \\ H_\theta &= \pm \Gamma_{mn} e^{\pm \Gamma_{mn} z} \frac{J_n(k_{c,mn}\rho) n}{r} \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Recordando que \vec{E}_t y \vec{H}_t son ortogonales, en este caso (aplicaría también para $\theta = \pi$) se tiene un PEW si con la versión coseno y un PMW con la seno, independientemente del valor de n (salvo que sea 0 en cuyo caso solo se puede trabajar con la forma coseno).

Para estudiar la pared en $y = 0$ se particulariza en $\theta = \pi/2$:

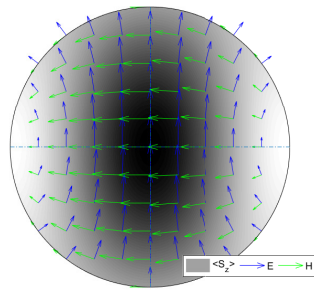
$$H_r = \pm \Gamma_{mn} e^{\pm \Gamma_{mn} z} k_{c,mn} J'_n(k_{c,mn} \rho) \begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{cases},$$

$$H_\theta = \pm \Gamma_{mn} e^{\pm \Gamma_{mn} z} \frac{J_n(k_{c,mn} \rho) n}{r} \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

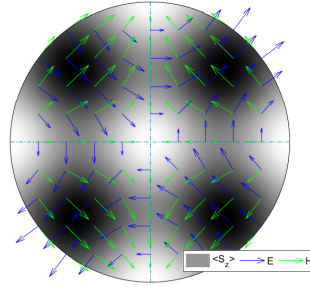
En este caso sí hay dependencia con n . Se observa que si n es par se anulan los senos, y si n es impar desaparecen los cosenos. Esto también sucede en el caso $\theta = 3\pi/2$. Por tanto, para n par y seno tendremos PMW, para n par y coseno PEW, para n impar y seno PEW y para n impar u coseno PMW. Las conclusiones se recogen en el cuadro 3.2, y se muestran ejemplos de modos en la figura 3.5.

Modos TE	$x = 0$	$y = 0$	Simetría f. gen.
<i>coseno</i> , n impar	<i>PEW</i>	<i>PMW</i>	TE_{eo}
<i>coseno</i> , n par	<i>PEW</i>	<i>PEW</i>	TE_{ee}
<i>seno</i> , n impar	<i>PMW</i>	<i>PEW</i>	TE_{oe}
<i>seno</i> , n par	<i>PMW</i>	<i>PMW</i>	TE_{oo}

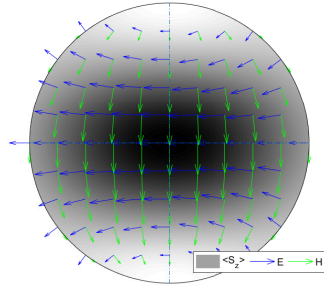
Cuadro 3.2: Paredes de los modos TE en la guía circular.



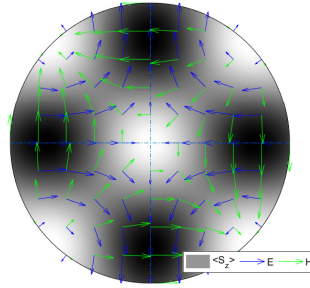
(a) TE_{11} , *coseno*.



(b) TE_{21} , *coseno*.



(c) TE_{11} , *seno*.



(d) TE_{21} , *seno*.

Figura 3.5: Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TE .

3.2.2. Modos TM

Los modos $TM^{s,c}$ tienen por función generatriz:

$$\psi_{e,mn} = J_n(k_{c,mn}\rho) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}, \quad 0 \leq \rho \leq a; 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (3.8)$$

Ahora el k_c depende de la m –ésima raíz (el «cero») de la función de Bessel de orden n , por lo que los modos TE y TM no tienen en principio la misma frecuencia de corte. La función generatriz es idéntica a la de caso anterior, por lo que las propiedades que se dedujeron del campo \vec{H} aplicarán ahora al \vec{E} y las del \vec{E} al \vec{H} . El cuadro 3.3 recoge los resultados y la figura 3.6 ejemplos de los campos. Un ejemplo de guía circular real se recoge en 2.6b.

Modos TM	$x = 0$	$y = 0$	Simetría f. gen.
<i>coseno</i> , n impar	PMW	PEW	TM_{eo}
<i>coseno</i> , n par	PMW	PMW	TM_{ee}
<i>seno</i> , n impar	PEW	PMW	TM_{oe}
<i>seno</i> , n par	PEW	PEW	TM_{oo}

Cuadro 3.3: Paredes de los modos TM en la guía circular.

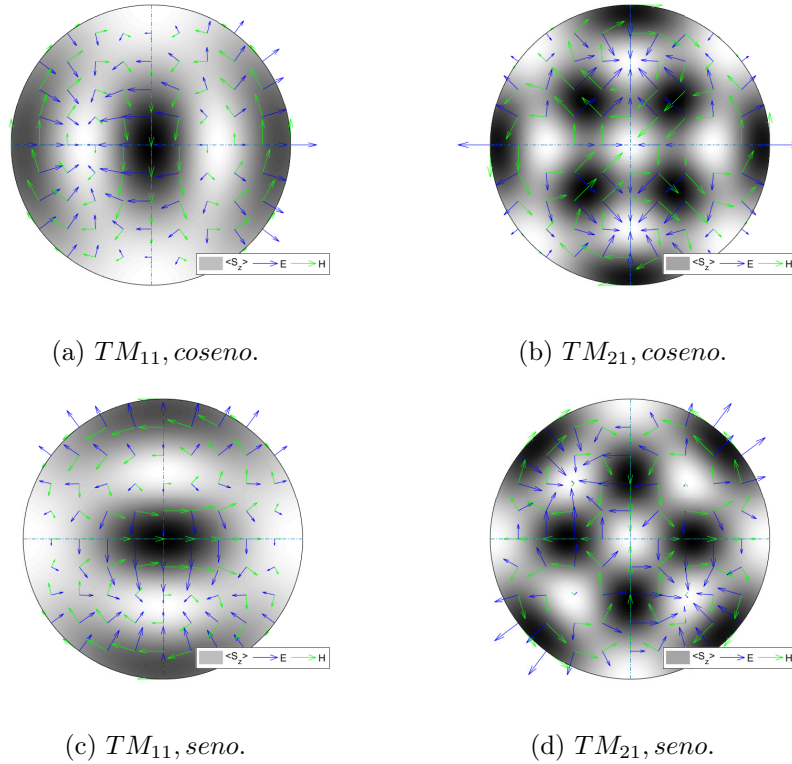


Figura 3.6: Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos TM .

3.2.3. Guía coaxial

El coaxial es similar a la guía circular en cuanto a los campos que se propagan en él. Puesto que el trabajo se centra principalmente en guías de onda, los comentarios acerca de este se pueden encontrar en el Anexo B.

3.3. Guía triangular equilátera

3.3.1. Modos TE y TM

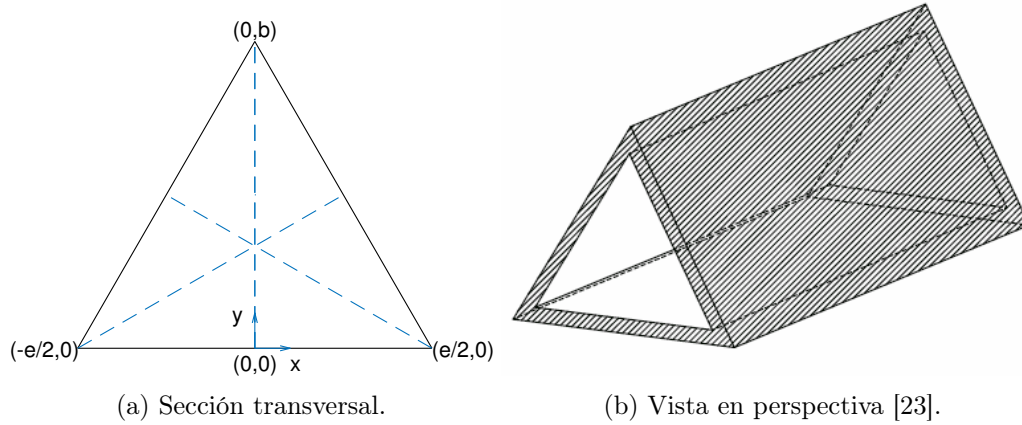


Figura 3.7: Guía triangular.

Para la guía triangular hay cuatro funciones generadoras, dos para cada grupo de modos, con una nomenclatura basada en su simetría (A – impar o asimétrica, S – par o simétrica) respecto de la recta $x = 0$ (ver [23] para el estudio de esta guía).

$$\psi_h^S = \cos(\tilde{k}_{y1}(y-b)) \cos(\tilde{k}_{x1}x) + \cos(\tilde{k}_{y2}(y-b)) \cos(\tilde{k}_{x2}x) + \cos(\tilde{k}_{y3}(y-b)) \cos(\tilde{k}_{x3}x), \quad (3.9)$$

$$\psi_h^A = \cos(\tilde{k}_{y1}(y-b)) \sin(\tilde{k}_{x1}x) + \cos(\tilde{k}_{y2}(y-b)) \sin(\tilde{k}_{x2}x) + \cos(\tilde{k}_{y3}(y-b)) \sin(\tilde{k}_{x3}x), \quad (3.10)$$

$$\psi_e^S = \sin(\tilde{k}_{y1}(y-b)) \cos(\tilde{k}_{x1}x) + \sin(\tilde{k}_{y2}(y-b)) \cos(\tilde{k}_{x2}x) + \sin(\tilde{k}_{y3}(y-b)) \cos(\tilde{k}_{x3}x), \quad (3.11)$$

$$\psi_e^A = \sin(\tilde{k}_{y1}(y-b)) \sin(\tilde{k}_{x1}x) + \sin(\tilde{k}_{y2}(y-b)) \sin(\tilde{k}_{x2}x) + \sin(\tilde{k}_{y3}(y-b)) \sin(\tilde{k}_{x3}x). \quad (3.12)$$

Aquí se puede decir que y varía de 0 a b ; y x de 0 a $(b-y)/\sqrt{3}$ para la mitad derecha ($x > 0$) y de $(y-b)/\sqrt{3}$ para la parte izquierda ($x \leq 0$). Las constantes $k_{xi,yi}$ dependen de los valores m y n de los modos:

$$\tilde{k}_{y1} = \frac{(-m-n)\pi}{b}; \quad \tilde{k}_{y2} = \frac{m\pi}{b}; \quad \tilde{k}_{y3} = \frac{n\pi}{b}. \quad (3.13)$$

$$\tilde{k}_{x1} = \frac{(m-n)\pi}{\sqrt{3}b}; \quad \tilde{k}_{x2} = \frac{(2n+m)\pi}{\sqrt{3}b}; \quad \tilde{k}_{x3} = \frac{(-2m-n)\pi}{\sqrt{3}b}. \quad (3.14)$$

En esta nomenclatura se tiene que dar que $n \leq m$, con $m \geq 1$, ambos m y n enteros.

La primera y segunda funciones se emplean para obtener los campos TE ; del segundo par de funciones se derivan los modos TM . El parámetro b es la altura del triángulo, mientras que el e es el lado. Ambos tienen una relación impuesta por la equilateralidad que es $b = \sqrt{3}e/2$. Esta estructura no tiene dos planos de simetría ortogonales, y, por tanto, sus modos solo tendrán una pared garantizada en uno de dichos ejes, en nuestro caso $x = 0$, que se deduce de la paridad de senos y cosenos.

Modos $TE_{mn}^{S/A}$	$x = 0$	Simetría f. gen.
mn , simétrico	PEW	TE_e
mn , asimétrico	PMW	TE_o

 Cuadro 3.4: Paredes de los modos TE en la guía triangular.

Modos $TM_{mn}^{S/A}$	$x = 0$	Simetría f. gen.
mn , simétrico	PMW	TM_e
mn , asimétrico	PEW	TM_o

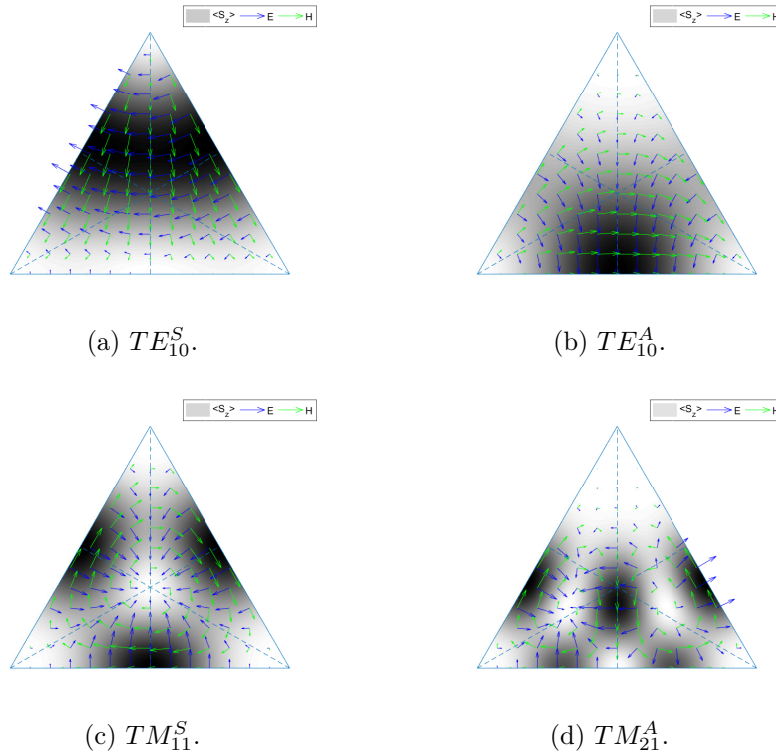
 Cuadro 3.5: Paredes de los modos TM en la guía triangular.


Figura 3.8: Campos transversales en las guías rectangulares para varios modos.

3.4. Otras guías

Las guías con más de cuatro planos de simetría (excepto la circular y coaxial) no tienen a día de hoy soluciones analíticas para sus campos. Por tanto, los estudios sobre sus paredes se deben realizar mediante simulaciones numéricas que resuelvan los campos realizando una discretización de las ecuaciones de Maxwell. El estudio de estas paredes puede ser útil para identificar de alguna forma los modos, que no tendrán para estas estructuras una nomenclatura definida. Un ejemplo de guía sin soluciones analíticas es la que alimenta la antena de bocina que aparece en la figura 2.6c.

4

Estudio de simetrías no convencionales en guías de onda

En esta sección se desarrollará para varios tipos de guías homogéneas y sin pérdidas los grupos de modos con simetría C_N , definida en segunda parte de la sección 2.3, a los que pertenecen sus modos. A pesar de que las expresiones de los campos están definidas desde hace tiempo, estos desarrollos sobre las simetrías C_N no se habían hecho hasta ahora. Para su realización se parte de las funciones generadoras antes descritas en el capítulo 3.

4.1. Desarrollo analítico – Introducción

En este Trabajo Fin de Grado se han desarrollado y demostrado una serie de casos analíticos, que se incluyen a continuación. Esta ha sido una parte importante del trabajo asociado al TFG, que luego se utilizará en capítulos posteriores para clasificar modos en dispositivos del front-end de los sistemas de comunicaciones. Se buscan campos que cumplan las ecuaciones planteadas en la sección 2.3.2. Como se ha visto anteriormente, los campos \vec{E} y \vec{H} son ortogonales entre sí si la guía es sin pérdidas, por lo que si se demuestra la expresión para uno de ellos, entonces inmediatamente quedará probada para el otro. Por lo que se vio en (2.9), (2.12), si se prueba:

$$\psi_{e,h} \left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{N} \right) = e^{\frac{-j2\pi q}{N}} \psi_{e,h} (\rho, \theta). \quad (4.1)$$

Entonces necesariamente se cumplirán (2.27) y (2.26). En toda la sección se harán los desarrollos sobre estas funciones, y se considerará finalizado el análisis cuando se clasifiquen todos los grupos de modos según el valor de q que cumplen. Es fundamental que a la hora de evaluar la expresión (4.1) el centro de coordenadas esté en el circuncentro de la sección transversal de la estructura.

4.2. Guía rectangular – Simetría C_2

Se empieza por una guía C_2 , debido a que esta simetría es la más sencilla de analizar, ya que los valores de q solo pueden ser 0 y 1. Hay que hallar las funciones que cumplen:

$$\psi_{e,h} \left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{N} \right) = \pm \psi_{e,h} (\rho, \theta). \quad (4.2)$$

4.2.1. Modos TM

La función generadora, con los ejes en el circuncentro de la estructura, partiendo de la que se recoge en 4.2, y en coordenadas polares, es:

$$\psi_e(\rho, \theta) = \sin\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi\rho\sin\theta}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \quad \begin{cases} -a/2 < \rho\cos\theta < a/2 \\ -b/2 < \rho\sin\theta < b/2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Esta función se evalúa en $\theta' = \theta + 2\pi/2 = \theta + \pi$:

$$\psi_e(\rho, \theta + \pi) = \sin\left(\frac{-n\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{-m\pi\rho\sin\theta}{b} + \frac{m\pi}{2}\right). \quad (4.4)$$

Para poder identificar las dos funciones anteriores hay que analizar los valores de m y n , en concreto su paridad. Se trata de identificar términos con argumentos similares en las funciones en θ y θ' , como se muestra aquí para el término con $\cos\theta$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) &= \sin\left(\frac{-n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) = -\sin\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right), & n \text{ par}, \\ \cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) &= \cos\left(\frac{-n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) = \cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right), & n \text{ impar}. \end{aligned}$$

Lo mismo sucede para el término en $\sin\theta$. Atendiendo a esto se llega a la conclusión, posteriormente recogida en el cuadro 4.1:

$$\begin{aligned} \psi_e(\rho, \theta) &= \psi_e(\rho, \theta + \pi); & m, n \text{ pares o } m, n \text{ impares}, \\ -\psi_e(\rho, \theta) &= \psi_e(\rho, \theta + \pi); & m \text{ par y } n \text{ impar o } m \text{ impar y } n \text{ par}. \end{aligned}$$

4.2.2. Modos TE

Ahora la función generadora es, en coordenadas polares, evaluada en θ y $\theta' = \theta + 2\pi/2 = \theta + \pi$:

$$\psi_h(\rho, \theta) = \cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi\rho\sin\theta}{b} + \frac{m\pi}{2}\right) \quad (4.5)$$

$$\psi_h(\rho, \theta + \pi) = \cos\left(\frac{-n\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{-m\pi\rho\sin\theta}{b} + \frac{m\pi}{2}\right). \quad (4.6)$$

Se puede observar que el resultado es similar al de los modos TE . Haciendo el mismo análisis de paridad de m y n se concluye lo recogido en el cuadro 4.1.

q	Modos 1	Modos 2
0	$TE(M)_{2m,2n}$	$TE(M)_{2m-1,2n-1}$
1	$TE(M)_{2m-1,2n}$	$TE(M)_{2m,2n-1}$

Cuadro 4.1: Modos TE y TM con simetría C_2 en guía rectangular según su q .

4.3. Guía cuadrada – Simetría C_4

Se prosigue el estudio con la guía cuadrada por su similitud con la guía rectangular que se acaba de analizar. De hecho, se podría hacer el análisis de esta suponiendo simetría C_2 en vez de C_4 , llegando a las mismas conclusiones que las que se obtenían en el apartado anterior.

4.3.1. Modos TM

Para los modos TM en coordenadas polares:

$$\psi_e(\rho, \theta) = \sin\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{m\pi}{2}\right) \begin{cases} -a/2 < \rho\cos\theta < a/2 \\ -a/2 < \rho\sin\theta < a/2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Primero se evalúa esta función directamente en $\theta' = \theta + 2\pi/4$ ya que $N = 4$.

$$\begin{aligned} \psi_e\left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{n\pi\rho\cos(\theta + \pi/2)}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi\rho\sin(\theta + \pi/2)}{a} + \frac{m\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{-n\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{m\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

De esto se pueden deducir algunas relaciones. Si $n = m$ y n es impar se tiene que:

$$\frac{n\pi}{2} = \frac{m\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \text{ entero.} \quad (4.8)$$

Lo cual lleva a, identificando las funciones en θ y θ' y teniendo en cuenta el factor complejo:

$$\cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = \cos\left(\frac{-n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}}. \quad (4.9)$$

Esta ecuación se cumple para $q = 0$ por la propiedad de paridad del coseno.

Se analiza también lo qué sucede para $m = n$ y n par. Se tiene que:

$$\frac{n\pi}{2} = \frac{m\pi}{2} = \pi k. \quad (4.10)$$

La igualdad pasa a ser:

$$\sin\left(\frac{n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = \sin\left(\frac{-n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}}. \quad (4.11)$$

Aquí se cumple la ecuación para $q = 2$ debido a que el seno es una función impar. Por tanto se concluye que los modos con índices $m = n$ pertenecen directamente al conjunto de modos C_4 .

Para obtener más modos que satisfagan otros valores de q se suman dos funciones generadoras de modos $\psi_e = \psi_{e1} + A\psi_{e2}$, donde A es un número complejo. Esto se puede hacer porque si ψ_{e1} y ψ_{e2} satisfacen las ecuaciones de Maxwell, entonces, por linealidad, ψ_e las satisfará también. Puesto que la ecuación de los modos C_N debe cumplirse en todo el espacio, los modos que conforman la suma deben ser necesariamente degenerados, es decir, tienen la misma frecuencia de corte. La expresión inicial es:

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{n_1\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n_1\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_1\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{m_1\pi}{2}\right) + \\ &A \sin\left(\frac{n_2\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n_2\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_2\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{m_2\pi}{2}\right) = \\ &\sin\left(\frac{-n_1\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{n_1\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_1\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{m_1\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}} + \\ &A \sin\left(\frac{-n_2\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{n_2\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_2\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{m_2\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}}. \end{aligned}$$

Para mantener la normalización de potencia de estas combinaciones basta con aplicar un factor de escala a la suma de $1/\sqrt{2}$ (que se omite en todos los desarrollos por legibilidad), ya que los modos son ortogonales. La continuación del desarrollo se puede ver en el Anexo C.1, y las conclusiones en el cuadro 4.2, donde r y s son enteros positivos.

q	Combinaciones 1	Combinaciones 2
-1	$TM_{2r,2s-1} + jTM_{2s-1,2r}$	$TM_{2r-1,2s} - jTM_{2s,2r-1}$
0	$TM_{2r-1,2s-1} + TM_{2s-1,2r-1}$	$TM_{2r,2s} - TM_{2s,2r}$
1	$TM_{2r-1,2s} + jTM_{2s,2r-1}$	$TM_{2r,2s-1} - jTM_{2s-1,2r}$
2	$TM_{2r,2s} + TM_{2s,2r}$	$TM_{2r-1,2s-1} - TM_{2s-1,2r-1}$

Cuadro 4.2: Combinaciones de modos TM con simetría C_4 .

Se observa que en el caso de $q = 0$ y $q = 2$ el resultado de la primera columna contiene las soluciones que se obtuvieron en los casos sin sumas de modos. En realidad, las dos columnas para $q = 1$ y $q = -1$ son equivalentes, puesto que pasar de una a otra solo hay que multiplicar el conjunto por $\pm j$. Se observa también que los modos para $q = \pm 1$ son siempre degenerados.

4.3.2. Modos TE

El desarrollo para los modos TE es muy similar que para los TM . Por razones de extensión, solo se recoge el cuadro de resultados, 4.3. El razonamiento se puede consultar en el anexo C.2.

q	Combinaciones 1	Combinaciones 2
-1	$TE_{2r-1,2s} + jTE_{2s,2r-1}$	$TE_{2r,2s-1} - jTE_{2s-1,2r}$
0	$TE_{2r,2s} + TE_{2s,2r}$	$TE_{2r-1,2s-1} - TE_{2s-1,2r-1}$
1	$TE_{2r,2s-1} + jTE_{2s-1,2r}$	$TE_{2r-1,2s} - jTE_{2s,2r-1}$
2	$TE_{2r-1,2s-1} + TE_{2s-1,2r-1}$	$TE_{2r,2s} - TE_{2s,2r}$

Cuadro 4.3: Combinaciones de modos TE con simetría C_4 .

Relaciones entre valores de q y paredes eléctrica y magnética

La categorización de modos según su q y las paredes que tienen en los ejes de simetría las estructuras están íntimamente relacionadas. Sirva de ejemplo el cuadro 4.4, que relaciona el cuadro 3.1 con los resultados anteriores:

Paredes modo 1	Paredes modo 2	Factor suma	$q - TE$	$q - TM$
E,E	E,E	± 1	0;2	2;0
E,M	M,E	$\pm j$	± 1	∓ 1
M,E	E,M	$\pm j$	∓ 1	± 1
M,M	M,M	± 1	2;0	0;2

Cuadro 4.4: Relación entre paredes y valores de q para la guía cuadrada.

Donde $q - TE$ es el valor que tomaría q si los modos fueran TE y $q - TM$ si pertenecieran a la familia de los TM . Las paredes en las dos primeras columnas son respectivamente para $x = 0$ e $y = 0$.

4.4. Guía triangular – Simetría C_3

En la guía triangular hay cuatro funciones generadoras de modos, dos TE y dos TM que a su vez se dividen en una versión simétrica (identificada por " S ") y asimétrica (identificada por " A "). En este trabajo se estudiarán múltiples casos hasta poder catalogar todos los modos según el valor de q que cumplen sus combinaciones, clasificación que no se encuentra en ningún libro o artículo de la bibliografía de estos temas (al menos dentro de lo que conoce el autor) .

4.4.1. Casos $m = n$

Para las guías triangulares se empiezan estudiando los casos con $m = n$. Como se había visto en las guías cuadradas y rectangulares, hay situaciones en las que estas funciones tendrán directamente simetría C_4 , sin necesidad de sumarlas con otras.

Modos TE_{nn}^S

La función generadora de los modos TE^S , vista en la sección 3.3, particularizada para $m = n$ y con los ejes centrados en el circuncentro del triángulo es la siguiente, que simplificada y en polares es:

$$\psi_h^S = \cos\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(\rho \sin \theta - \frac{2b}{3}\right)\right) + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho \sin \theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{3n\pi}{\sqrt{3}b}\rho \cos \theta\right). \quad (4.12)$$

Primero se desarrolla el producto de cosenos en un conjunto de sumas. Esto se hará en múltiples ocasiones ya que es la única forma de juntar los términos con $\sin \theta$ y $\cos \theta$ dentro de una misma función trigonométrica:

$$\begin{aligned} \psi_h^S(\rho, \theta) = & \cos\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(\rho \sin \theta - \frac{2b}{3}\right)\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sin \theta + \sqrt{3}\cos \theta\right) - \frac{2b}{3}\right)\right) + \\ & \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sin \theta - \sqrt{3}\cos \theta\right) - \frac{2b}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

Ahora se evalúa la expresión en $\theta' = \theta + 2\pi/3$, recordando que:

$$\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \theta \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta) \quad (4.13)$$

$$\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos \theta \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}(\sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta). \quad (4.14)$$

Sustituyendo término a término:

$$\begin{aligned} \psi_h^S\left(\rho, \theta' = \theta + \frac{2\pi}{3}\right) = & \cos\left(\frac{-n\pi}{b}\left(\rho\left(\sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta\right) - \frac{4b}{3}\right)\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(-2\rho \sin \theta - \frac{2b}{3}\right)\right) + \\ & \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sqrt{3}\cos \theta + \sin \theta\right) - \frac{2b}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Se busca ahora demostrar que ambas expresiones en θ' y θ son iguales, es decir, cumplen la ecuación de los modos C_3 para $q = 0$. El tercer término de la expresión en θ' es igual al

segundo de la original. Del primer término se obtiene el tercero de la ecuación en θ sabiendo que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi n)$ (con n entero).

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\right) - \frac{4b}{3}\right) + 2\pi n\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\right) + \frac{2b}{3}\right)\right) = \\ \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta\right) - \frac{2b}{3}\right)\right) &\quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Por último, del segundo término se puede obtener el primero de la original aplicando la misma propiedad.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(-2\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right) + 2\pi n\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(-2\rho\sin\theta + \frac{4b}{3}\right)\right) = \\ \cos\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) &\quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

Con esto se ha demostrado que los modos TE_{nn}^S tienen simetría C_3 con $q = 0$.

Modos TE_{nn}^A

Se evalúa ahora para $m = n$ la función generadora de los modos TE_{nn}^A .

$$\begin{aligned} \psi_h^A &= \cos\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right) \sin\left(\frac{0\pi}{\sqrt{3}b}x\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right) \sin\left(\frac{3n\pi}{\sqrt{3}b}x\right) + \\ &\cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right) \sin\left(\frac{-3n\pi}{\sqrt{3}b}x\right) = 0. \end{aligned}$$

Efectivamente, el primer término desaparece y los dos siguientes se anulan entre sí. Por tanto, no existen en general los modos TE_{nn}^A .

Modos TM_{nn}^S y TM_{nn}^A

Los desarrollos para estos modos son muy similares que para los TE y pueden consultarse en el Anexo C.3. En cualquier caso, se concluye que los modos TM_{nn}^S tienen simetría C_3 con $q = 0$ y que los modos TM_{nn}^A no existen en general, como sucedía con los TE asimétricos.

4.4.2. Casos $m \neq n$

Se sabe que los modos C_3 tienen que estar compuestos por combinaciones de modos degenerados, es decir, con la misma frecuencia de corte. Si se observa su expresión (obtenida de [23]), donde c es la velocidad de la luz en el medio y e el lado del triángulo, y puesto que $n \leq m$ por definición:

$$f_{mn} = \frac{2c}{3e} \sqrt{m^2 + n^2 + mn}, \quad (4.15)$$

entonces solo son degenerados los modos TE_{mn}^S con los TE_{mn}^A y los TM_{mn}^S con los TM_{mn}^A .

Caso $m = n + 3l$

Primero se estudia el caso de $m = n + 3l$, donde l es un entero mayor o igual que 0. La función generadora es la siguiente después de aplicar esta particularización.

$$\begin{aligned} \psi_h^S = & \cos\left(\frac{(-2n-3l)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{(3l)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + \\ & \cos\left(\frac{(n+3l)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{(3n+3l)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + \\ & \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{(-6l-3n)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right). \end{aligned}$$

Este desarrollo, aunque interesante, es extenso y se incluye en el Anexo C.4. Se llega a la conclusión de que todos los modos $(n + 3l, n)$ en guía triangular tienen simetría C_3 con $q = 0$.

Caso $m = n + 3l - k$

Se estudia la función generadora para los modos $\psi_h^S + S\psi_h^A$, donde S es el factor de suma, en principio complejo, aplicando $m = n + 3l - k$, donde k valdrá 1 o 2. Aquí $n \geq 0$ y $l \geq 1$ y en cualquier caso $m > 0$.

$$\begin{aligned} \psi_h = & \cos\left(\frac{(-2n-3l+k)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{(3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + S\sin\left(\frac{(3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right) + \\ & \cos\left(\frac{(n+3l-k)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{(3n+3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + S\sin\left(\frac{(3n+3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right) + \\ & \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{(-3n-6l+2k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + S\sin\left(\frac{(-3n-6l+2k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right). \end{aligned}$$

Este caso es el más genérico y cuyo análisis tiene una mayor extensión. Puesto que hace uso de una metodología similar a la de los casos anteriores, no se muestra aquí. El desarrollo se puede encontrar en el anexo C.5.

Con esto se ha terminado, puesto que después de encontrar los conjuntos de modos aplicando $m = n$, $m = n + 3l$, $m = n + 3l - 2$ y $m = 3l - 1$ cualquier otra expresión de m respecto de n será equivalente a alguna de las anteriores. El cuadro 4.5 contiene los resultados finales.

q	Modos 1	Modos 2
-1	$TE(M)_{n+3l-2,n}^S + jTE(M)_{n+3l-2,n}^A$	$TE(M)_{n+3l-1,n}^S - jTE(M)_{n+3l-1,n}^A$
0	$TE(M)_{n,n}^{A,S}$	$TE(M)_{n+3l,n}^{A,S}$
1	$TE(M)_{n+3l-1,n}^S + jTE(M)_{n+3l-1,n}^A$	$TE(M)_{n+3l-2,n}^S - jTE(M)_{n+3l-2,n}^A$

Cuadro 4.5: Grupos de modos TE y TM según su valor de q en la guía triangular.

4.5. Guía circular: C_∞

La guía circular es el único caso, junto con el coaxial, en el que se da $N = \infty$. Primero se demostrará que el análisis C_N es coherente con esta propiedad, y luego se verá un ejemplo de cómo esta guía se puede estudiar con un N arbitrario.

4.5.1. Modos TE y TM

En el caso de la guía de onda circular la función generatriz es, para los modos TE (subíndice h) y TM (subíndice e) es, recordando las expresiones de la sección 3.2:

$$\psi_{h,e} = J_n(k_{ch,e}\rho) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq a; 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (4.16)$$

Se recuerda que a la expresión en seno se la denomina $TE(M)^s$ y a la coseno $TE(M)^c$. Se va a demostrar un caso particular que satisface la ecuación de C_N sumando un ángulo arbitrario ϕ a una suma de funciones generadoras con factor de suma $S = j$. El objetivo es probar que, para cierto ϕ y α :

$$J_n(k_c\rho) (\sin(n\theta) + j \cos(n\theta)) = J_n(k_c\rho) (\sin(n\theta + \phi) + j \cos(n\theta + \phi)) e^\alpha. \quad (4.17)$$

Se desarrolla la expresión de la derecha:

$$\begin{aligned} & J_n(k_c\rho) (\sin(n\theta + \phi) + j \cos(n\theta + \phi)) (\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)) = \\ & J_n(k_c\rho) (\sin(n\theta + \phi) \cos(\alpha) - \cos(n\theta + \phi) \sin(\alpha)) + \\ & J_n(k_c\rho) j (\sin(n\theta + \phi) \sin(\alpha) + \cos(n\theta + \phi) \cos(\alpha)) = \\ & J_n(k_c\rho) (\sin(n\theta + \phi - \alpha) + j \cos(n\theta + \phi - \alpha)). \end{aligned}$$

Efectivamente, la ecuación se cumple en general si $\alpha = \phi$. Si se hiciera la suma con un factor $S = -j$ se llegará a que $\alpha = -\phi$. Queda probado que para cualquier N se puede encontrar al menos un q que satisfaga la ecuación. En una guía C_∞ estudiada como tal habría infinitos valores posibles de q , lo que quiere decir que a cada q correspondería una sola pareja de modos degenerados.

4.5.2. Guía circular como C_4

Se ha estudiado un caso particular de la guía, en el que supondremos un $N = 4$, puesto que posteriormente se analiza un dispositivo con estas características. Por razones de espacio, el desarrollo se encuentra en el Anexo C.6. El dispositivo en cuestión es el que se desarrolla en la sección 5.3. El cuadro 4.6 contiene los resultados.

q	Modos 1	Modos 2
-1	$TE(M)_{m,4l+1}^c + jTE(M)_{m,4l+1}^s$	$TE(M)_{m,4l+3}^c - jTE(M)_{m,4l+3}^s$
0	$TE(M)_{m,4l}^s$	$TE(M)_{m,4l}^c$
1	$TE(M)_{m,4l+3}^c + jTE(M)_{m,4l+3}^s$	$TE(M)_{m,4l+1}^c - jTE(M)_{m,4l+1}^s$
2	$TE(M)_{m,4l+2}^s$	$TE(M)_{m,4l+2}^c$

Cuadro 4.6: Combinaciones de modos TE y TM en guía circular estudiada como C_4 .

4.6. Ortogonalidad de los modos C_N

Puesto que los nuevos modos que se han obtenido para las guías son combinaciones de modos originales, en este trabajo se ha procedido a probar que son ortogonales para garantizar que forman una base con características similares a la original. En el caso de las guías C_2 no había combinaciones de modos, y por tanto no es necesario comprobar su ortogonalidad. El desarrollo se puede encontrar en el Anexo D, y llega a la conclusión de que cuando se da una pareja de modos con factor de suma R hay que analizar, para dos modos i, j con $i \neq j$:

$$\iint_S (k_{ci}^2 \psi_i^2 - |R| k_{cj}^2 \psi_j^2) dS = 0 \quad (4.18)$$

Puesto que solo se estudian parejas de modos degenerados, debido a que la ortogonalidad con el resto de modos sigue siendo cierta después de hacer las combinaciones, $k_{ci}^2 = k_{cj}^2$ y se pueden retirar de la ecuación. En el mismo Anexo D se estudian los casos de guía cuadrada y triangular.

4.7. Simulaciones numéricas sobre guías varias

Se han hecho unas simulaciones sobre varias guías (ver figura 4.1) C_N con los siguientes criterios, elaborados a partir de las deducciones analíticas:

- Se han estudiado las combinaciones de los campos de modos con la misma frecuencia de corte y del mismo tipo (ambos TE o TM).
- Las combinaciones son todas del tipo $\vec{E}_1 \pm \vec{E}_2$ o $\vec{E}_1 \pm j\vec{E}_2$, haciéndose la misma combinación para el vector \vec{H} .
- Si para la suma $\vec{A} + j\vec{B}$ se obtiene un valor de q , para $j\vec{A} + \vec{B}$ se obtendrá otro de $-q$. Esto quiere decir, por ejemplo, que si invirtiéramos el orden de los sumandos obtendríamos los valores de q invertidos respecto del caso original. También quiere decir que para un q fijo podemos encontrar dos combinaciones de los modos que satisfacen la ecuación como ya se ha visto en el desarrollo analítico. En los cuadros solo se muestra una de dichas parejas.

Se han analizado los 20 primeros modos (alguno más si son degenerados) que se propagan en cada una de las guías. Los resultados pueden verse en el Anexo E. Las resoluciones numéricas se obtienen mediante FEM, descrito en la sección 2.5. Para más información acerca de esta implementación concreta se recomienda ver [24].

4.7.1. Guías C_2 , C_3 y C_4

Se ha comprobado que los resultados coinciden con los desarrollos teóricos antes hechos. Además se ha analizado el caso de guía triangular y cuadrada «recortadas», que a pesar de no tener ejes de simetría comparten ciertas similitudes con sus contrapartidas con simetría axial.

4.7.2. Guías C_5 y de mayor orden

La guía pentagonal no tiene soluciones analíticas para los campos, aunque atendiendo a su pared en el eje $x = 0$ se puede intuir una posible categorización de los modos similar a la de la guía triangular, empleando su nomenclatura, ya que solo tiene una pared perfecta permanente. Si denominamos a los modos TE^S si su pared es eléctrica y TE^A si es magnética y al contrario para los TM , como sucedía en la triangular, y se sigue una notación similar a la de dicha guía con m y n se llega al cuadro 4.7.

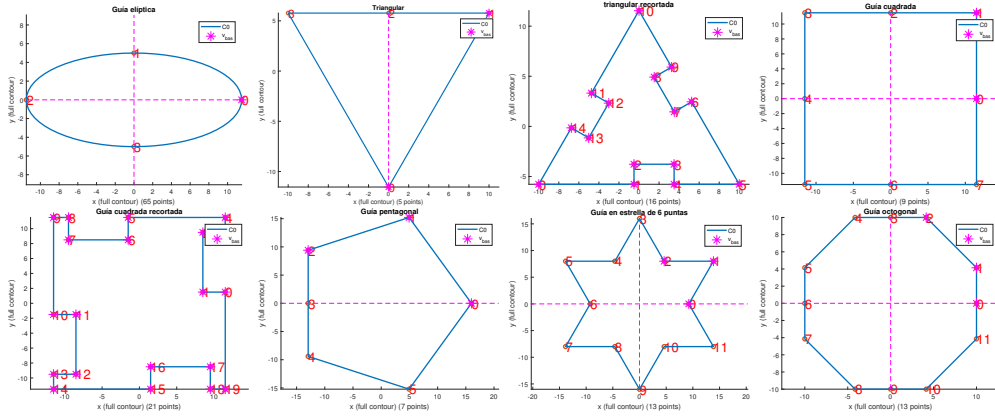


Figura 4.1: Guías con distintos tipos de simetrías (algunas no convencionales) analizadas en las simulaciones.

4.7.3. Algunas conclusiones de las simulaciones

- El primer modo que se propaga en todas las guías es TE , pertenece al grupo $q = \pm 1$, y es doblemente degenerado en aquellas con $N > 2$.
- El primer modo TM que se propaga en todas las guías pertenece al grupo $q = 0$ y nunca es degenerado.
- Los modos con $q = 0$ y $q = N/2$ para N par tienen fase constante a lo largo de toda la sección de la estructura. En general, estos modos no son degenerados, aunque hay muchos casos en los que se dan. Un modo con $q = 0$ solo puede ser degenerado con otro de su mismo grupo o de $q = N/2$ y al contrario.
- Los modos TE y TM con $q \neq 0, N/2$ (este segundo si N es par) están conformados por componentes ortogonales desfasadas j o 90 grados independientemente de la geometría. Esto quiere decir que estos modos tienen una polarización circular implícita, y que si para $+q$ el giro es en sentido horario, para $-q$ será antihorario y al contrario.

q	Modos 1	Modos 2
-2	$TE(M)_{n+5l-2,n}^S + jTE(M)_{n+5l-2,n}^A$	$TE(M)_{n+5l-2,n}^S - jTE(M)_{n+5l-2,n}^A$
-1	$TE(M)_{n+5l-4,n}^S + jTE(M)_{n+5l-4,n}^A$	$TE(M)_{n+5l-4,n}^S - jTE(M)_{n+5l-4,n}^A$
0	$TE(M)_{n,n}^{A,S}$	$TE(M)_{n+5l,n}^{A,S}$
1	$TE(M)_{n+5l-1,n}^S + jTE(M)_{n+5l-1,n}^A$	$TE(M)_{n+5l-1,n}^S - jTE(M)_{n+5l-1,n}^A$
2	$TE(M)_{n+5l-3,n}^S + jTE(M)_{n+5l-3,n}^A$	$TE(M)_{n+5l-3,n}^S - jTE(M)_{n+5l-3,n}^A$

Cuadro 4.7: Propuesta de categorización modos TE y TM en guía pentagonal.

5

Dispositivos basados en simetrías no convencionales

En este último apartado se hace un análisis de dispositivos con simetrías no convencionales. Para ello se hace uso de los parámetros S, que se explicaron en la sección 2.6. La metodología para las combinaciones puede consultarse en el Anexo F. Primero se partirá de dispositivos hardware con simetrías clásicas, y después se pasará a nuevos dispositivos donde se utilizarán las clasificaciones desarrolladas en el capítulo 4.

5.1. Polarizador por desfase de modos

El primer dispositivo que presentamos es un polarizador en guía cuadrada corrugada procedente del artículo [6]. Este dispositivo toma como entrada los modos TE_{01} y TE_{10} y desfasa uno respecto del otro 90 grados, consiguiendo así una polarización circular a partir de una lineal. Existen varias estructuras que consiguen este efecto, o variantes del mismo, como la que se muestra contiguamente a la estudiada.

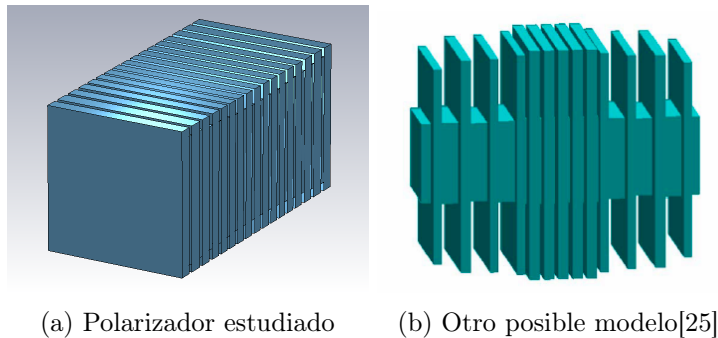


Figura 5.1: Polarizadores basados en la combinación de TE_{10} y TE_{01}

Este dispositivo funciona en dos bandas, en torno a 20 y 30 GHz, y tiene un ancho de banda de alrededor de 500 MHz en torno a cada una de ellas. Una relación axial de $0dB$ implica una polarización puramente circular. La adaptación de este dispositivo es superior a los $20dB$ en ambas bandas. Debido a la geometría del dispositivo los modos TE_{01} y TE_{10} no excitan ningún otro en la banda de funcionamiento. Se muestran los parámetros S y la relación axial (sec. 2.4).

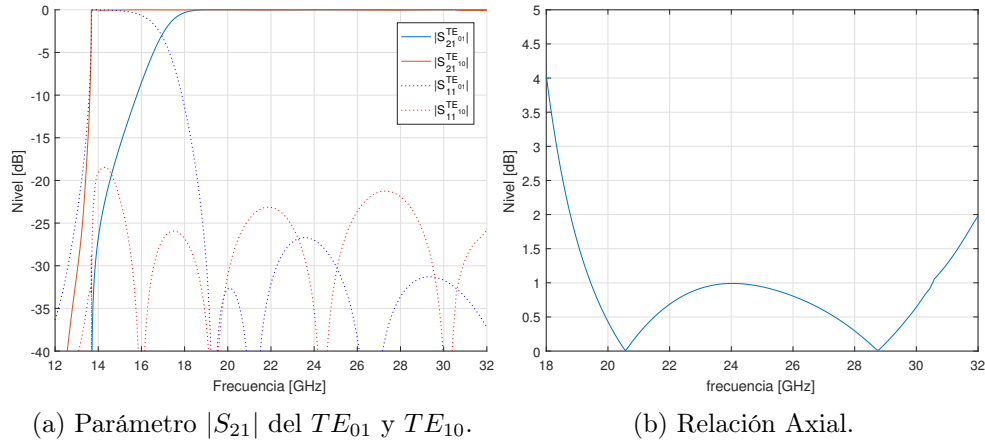


Figura 5.2: Transmisión de los modos fundamentales y relación axial.

5.2. Inversor del ángulo de polarización en guía cuadrada

Este dispositivo propuesto en [26] [27] [28] aprovecha la naturaleza de la simetría C_4 para rotar el ángulo de polarización de los modos TE_{10} y TE_{01} . Consiste en dos láminas de metal con cuatro aperturas rectangulares dispuestas en sentido horario y antihorario. Es importante notar que las secciones tienen simetría C_4 , pero no dos planos de simetría. Este es un caso donde el análisis hecho en los capítulos anteriores empieza a ser necesario.

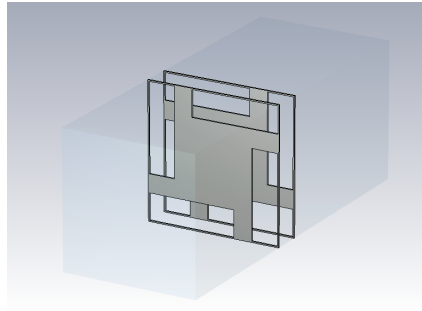


Figura 5.3: Dispositivo modificador del ángulo de polarización

Un efecto que se observa mejor gracias al empleo de las combinaciones de modos propuestas en este trabajo es cómo las resonancias que aparecen muy separadas para distancias entre láminas pequeñas se van juntando a medida que las separamos. En las gráficas de la figura 5.4 se observan dos máximos en las curvas, pero solo en la segunda estos dos máximos tienen el mismo valor normalizado de $0dB$. Al trabajar con dispositivos con simetría C_N , si se excita con un modo perteneciente a un grupo con un q determinado, este solo excitará otros modos con ese mismo q (o, para este caso, el de q contrario) (ver figura 5.5), lo que puede ser beneficioso para el ancho de banda monomodo.

Los modos $TE(M)_{11}$ se empiezan a propagar a partir de aproximadamente 9,3 GHz, los $TE_{02,20}$ a partir de 13 GHz y los $TE_{21,12}$ desde los 14,5 GHz. Las combinaciones con $+j$ están en línea discontinua, y las $-j$ en continua. Se observa en la figura 5.6 que al excitar con el TE_{11} que el dispositivo hace que no se polaricen los modos con $q = 0$ o $q = \pm 1$: Al entrar con un modo $q = 2$ solo aparecen a la salida modos con este mismo valor de q .

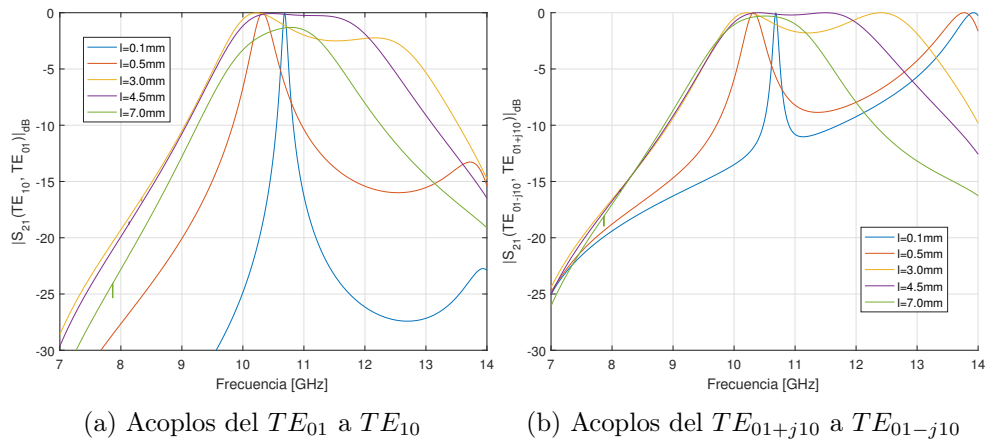
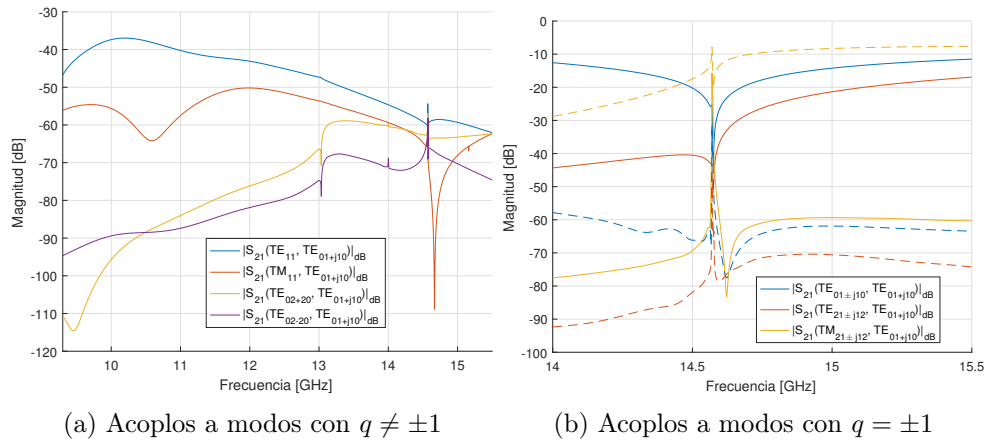
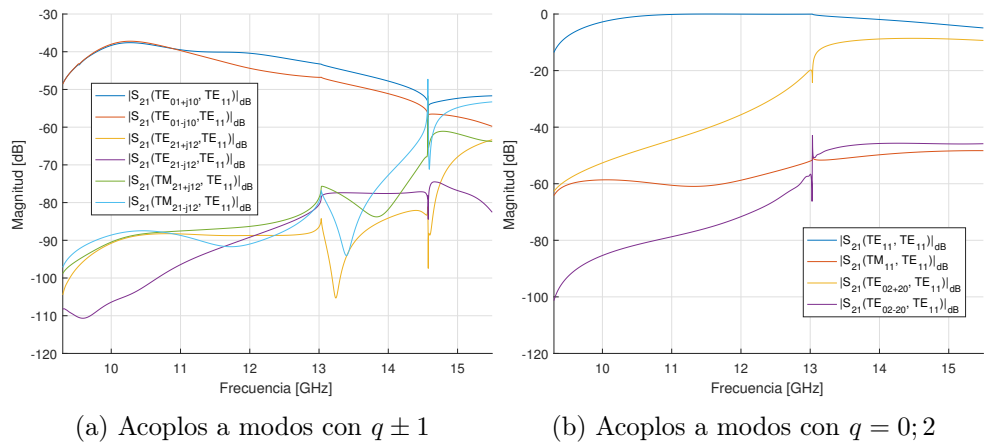


Figura 5.4: Transmisión de potencia entre modos en función de la distancia entre láminas


 Figura 5.5: Parámetro S_{21} del TE_{01+j10} a otros modos con según su grupo.

 Figura 5.6: Parámetro S_{21} del TE_{11} a otros modos según su grupo.

5.3. Modificador del ángulo de polarización en guía circular

Este dispositivo propuesto en [29] es similar al anterior pero presenta una ventaja, que es permitir un ángulo de rotación parametrizable según el ángulo entre las láminas. Hay que destacar de nuevo que las láminas son íris de simetría C_4 como las estructuras estudiadas en el capítulo anterior.

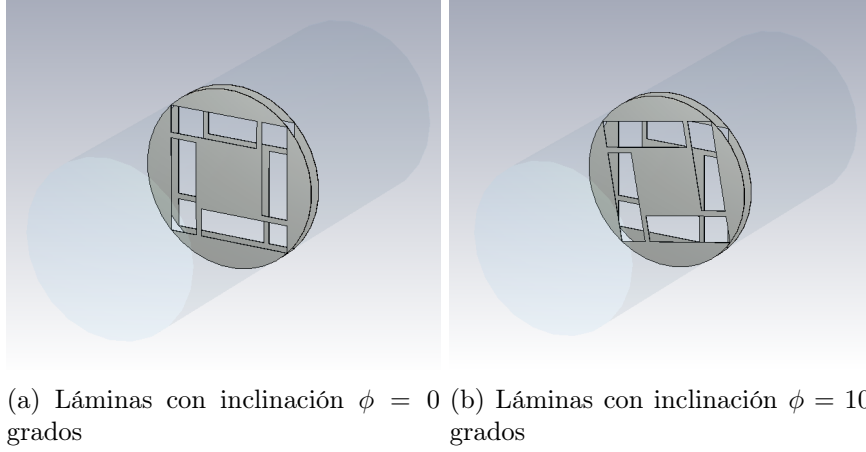


Figura 5.7: Modificador ángulo de polarización sobre guía circular

Las láminas, independientemente de su angulación fuerzan una simetría C_4 sobre la estructura, por lo que el comportamiento tendrá ciertas similitudes con el del caso anterior.

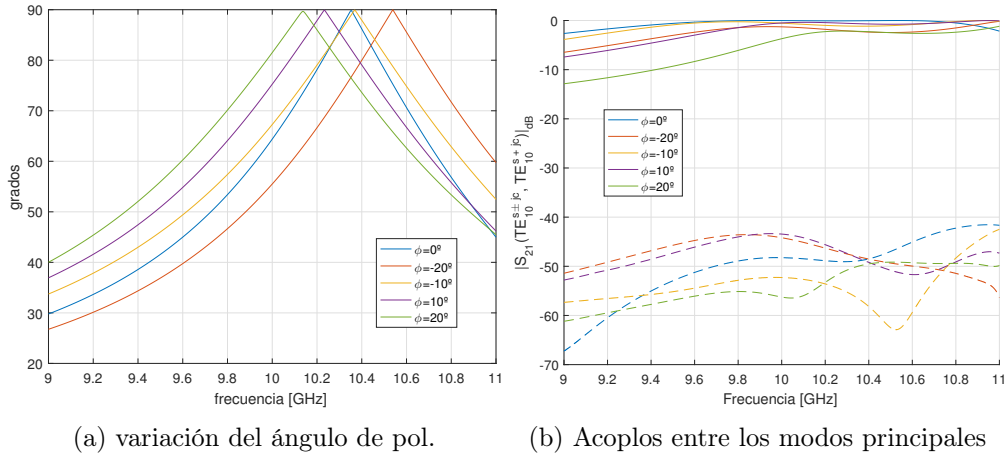


Figura 5.8: Comportamiento del dispositivo para varios valores del ángulo de inclinación

En la gráfica «b» de la figura 5.8 se excita con el modo $TE_{10}^s + jTE_{10}^c$ y se mide la transmisión del mismo (línea discontinua) y el acople al $TE_{10}^s - jTE_{10}^c$ (línea continua). La rotación está calculada como (excitando con el modo TE_{01}):

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{|s_{TE_{10}}^{21}|}{|s_{TE_{01}}^{21}|} \quad (5.1)$$

Se ha redactado una discusión de los resultados obtenidos frente a los que cita el artículo en el Anexo G, puesto que son ligeramente distintos.

5.4. Modificador del ángulo de polarización en guía triangular

En este trabajo se ha empezado a proponer nuevas estructuras en base a las geometrías ya estudiadas. En este caso es un dispositivo similar a los anteriores, adaptado a la guía triangular.

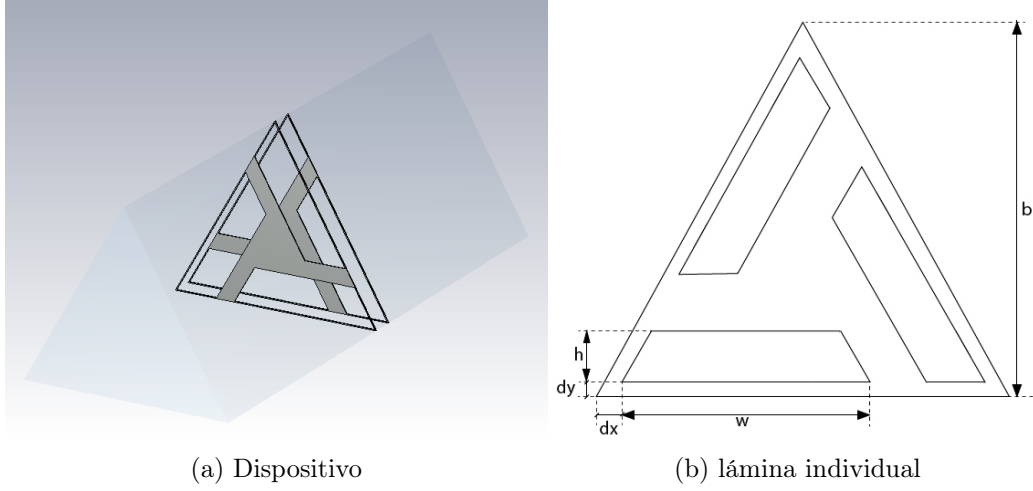


Figura 5.9: Dispositivo modificador del ángulo de polarización

Las láminas tienen simetría de rotación C_3 . En la figura 5.9, se observan los parámetros de diseño. dx y dy determinan la distancia a los picos; y w y h son la base y altura de los trapecios a través de los cuales pasan los campos. b es la altura del triángulo. Hay otros dos parámetros que no aparecen en esta figura, que son la anchura de las láminas (t) y la distancia entre láminas, que se ha denominado l . Esta notación es muy similar a la que se emplea en [27].

En la figura 5.10 se observa el efecto de separar las láminas, que desplaza los picos de resonancia de forma similar a lo que sucedía en 5.2. El ángulo de polarización no se invierte completamente para la región de adaptación, sino que el efecto es más similar a lo que sucedía en la sección 5.3. Las dimensiones son $b = 19,9mm$, $w = 16mm$, $h = 4mm$, $dy = 0,2mm$, $dx = 0,3mm$, $t = 0,1mm$.

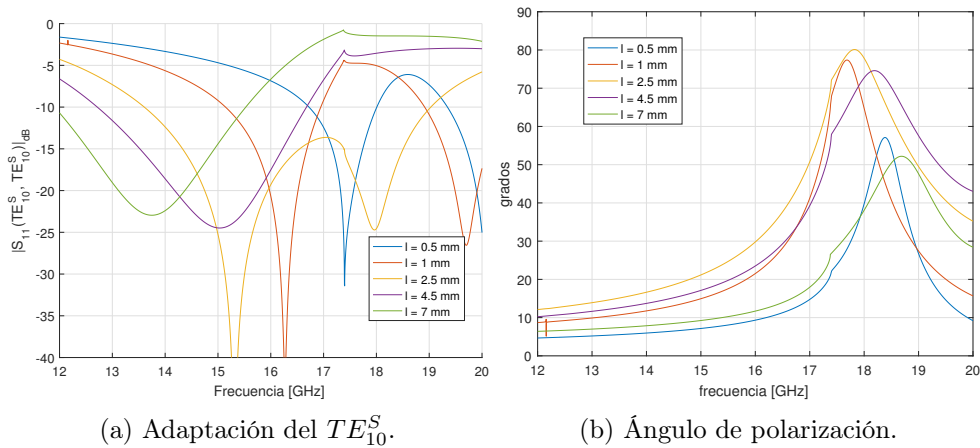


Figura 5.10: Comportamiento del dispositivo para varias distancias entre láminas.

En la figura 5.11 se muestra el efecto de modificar las dimensiones de las ranuras (en concreto w) tras fijar la distancia entre ellas a $l = 2,5\text{mm}$ (el resto de parámetros no varían respecto del caso anterior). En esta ocasión se muestra el efecto para la excitación a la entrada con el modo fundamental con $q = 1$, TE_{10}^{S+jA} . Las líneas discontinuas corresponden a los niveles del mismo modo a la salida, y las continuas a los del otro modo principal, el TE_{10}^{S-jA} .

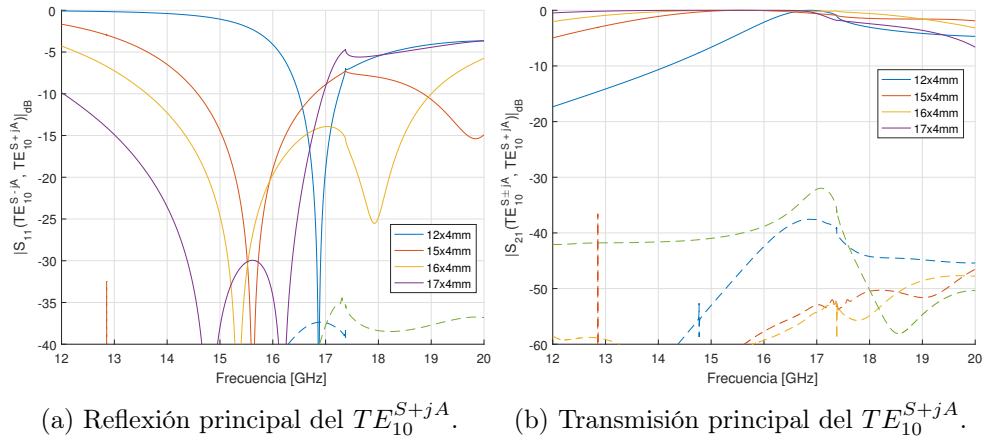


Figura 5.11: Comportamiento del dispositivo para varias anchuras de láminas con modos C_3 .

Esta es solo una de las posibilidades de creación de íris en guía triangular basados en este concepto y requiere de un mayor análisis. Otras estructuras a estudiar son las que se muestran en la figura 5.12. Sería interesante realizar en trabajos futuros una comparativa detallada de las prestaciones de cada una.

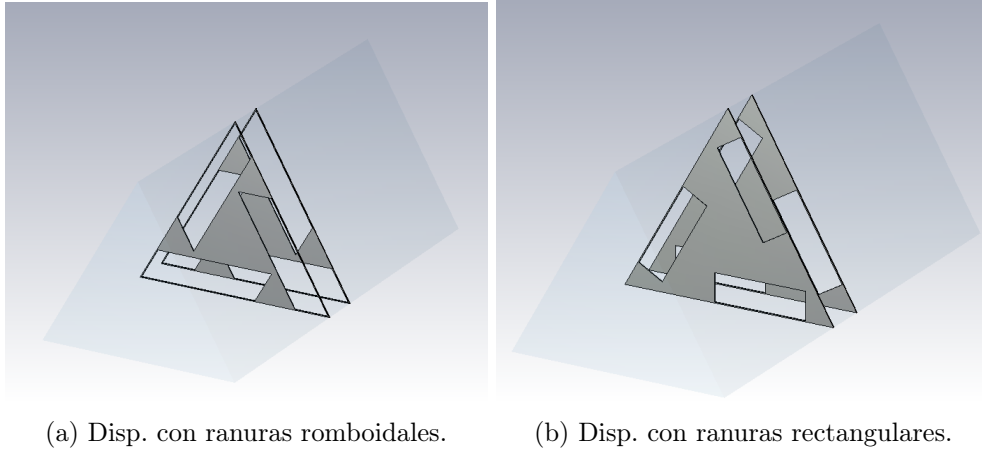


Figura 5.12: Otras posibilidades para modificadores del ángulo de polarización.

6

Conclusiones y trabajo futuro

6.1. Conclusiones

El hardware front-end de los sistemas de comunicaciones está en continuo desarrollo. Entre los retos que se plantean está el maximizar su ancho de banda monomodo y reducir las dimensiones, costes y peso sin renunciar a unas buenas prestaciones. En el ámbito de las guías de onda estos factores son de especial importancia por las aplicaciones en las que típicamente se emplean, como las comunicaciones por satélite. Para elaborar nuevos dispositivos a altas frecuencias es necesario expandir la teoría del análisis de sus estructuras, por ejemplo atendiendo al intercambio de energía en sus discontinuidades o estudiando sus propiedades geométricas.

La cuestión principal que aborda este trabajo es la de la justificación de la existencia de modos con simetría de rotación de orden N (giros de $360/N$ grados) en estructuras periódicas de guías de onda (aunque también se ha justificado para coaxial), inédita hasta ahora. Se ha mostrado cómo la agrupación de modos por su simetría de rotación complementa el estudio por el tipo de paredes en los ejes para las estructuras con simetría axial y cómo lo generaliza para las guías sin simetría de reflexión. Además de su existencia, se ha aportado el método para probar que forman una base de funciones ortogonales, con las mismas propiedades que las originales. Se ha probado también cómo los estudios C_N sobre las guías se pueden hacer de forma análoga para otras estructuras cuyos N sean divisores enteros.

Después del estudio inicial, las simulaciones numéricas han justificado la existencia de este tipo de campos en guías sin simetría axial, resueltos mediante el método de elementos finitos. Se han analizado numerosas estructuras sin encontrar ninguna en que no existan este tipo de modos. Entre las conclusiones que se extraen de este análisis cabe destacar que las combinaciones de modos para q distinto de 0 o $N/2$ para N par son modos que derivan en polarizaciones circulares, que el primer modo que se propaga pertenece siempre al grupo $q = 1$ y que es doblemente degenerado para $N > 2$. Por otro lado, el primer modo TM que se propaga pertenece al grupo $q = 0$ y nunca es degenerado.

La categorización por valores de q permite también agrupar de acuerdo a una cierta periodicidad los modos de todos los tipos de guías, con o sin simetría axial, y les da un significado físico, como también se ha mostrado. Además, sirve como abstracción de las condiciones de contorno de pared eléctrica y magnética.

Los análisis de los dispositivos C_N con la categorización por simetría de rotación también justifican el significado físico de esta y la utilidad del método. Por un lado es coherente estudiar las simetrías de rotación con este tipo de modos, y por otro, este tipo de campos permite entender mejor el funcionamiento de dichos dispositivos, especialmente si se tiene como objetivo utilizarlos en aplicaciones en las que la polarización circular desempeñe un papel importante.

Por otro lado, los dispositivos con simetrías no convencionales han sido hasta ahora poco estudiados, y como se ha visto pueden proporcionar funcionalidades como la rotación del ángulo de polarización mediante estructuras fáciles de fabricar y con dimensiones pequeñas en relación a la longitud de onda.

6.2. Trabajo futuro

Una posible línea de trabajo futuro consistiría en catalogar completamente los modos de otras guías no plenamente abordadas aquí como la hexagonal u octogonal. Esto puede ser de interés para completar la teoría al respecto. El análisis de las simetrías y rotaciones en la guía elíptica, no estudiado analíticamente aquí, finalizaría el trabajo con las estructuras que se pueden estudiar de una forma no numérica.

Otra línea de trabajo futuro partiría de los resultados aquí obtenidos y consistiría en relacionar los modos de las guías cuyos órdenes de simetría de rotación sean múltiplos cuando se concatenan entre ellas y el efecto que tiene esta concatenación en la transmisión de señal (parámetros S).

El estudio de las guías sin simetrías axiales puede ser interesante a la hora de conseguir mayores anchos de banda en las guías. De la misma forma que la guía «ridge» permite lograr una mayor banda monomodo, haciendo optimizaciones sobre guías como las «recortadas» triangular o cuadrada quizá sea posible lograr un amplio ancho de banda para los modos fundamentales (con $q = 1$) frente a sus contrapartidas con simetría axial.

Por último, es de gran interés estudiar y diseñar más dispositivos con simetría de rotación de orden N , puesto que pueden ofrecer soluciones con buenas prestaciones en un reducido espacio y ser de gran utilidad en aplicaciones con polarización circular. Otra posible aplicación de estos dispositivos es como filtros por reflexión, aunque aún queda mucho que estudiar al respecto.

Bibliografía

- [1] David M. Pozar. *Microwave Engineering, Fourth Edition*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, Nueva Jersey, EEUU, 2012.
- [2] Redacción Europa Press. La subasta de las frecuencias para el 5G ya ha recaudado 428 millones. *Expansión, edición digital*, Julio 2018.
- [3] European commission to harmonise the last pioneer frequency band needed for 5G deployment. <https://ec.europa.eu/digital-single-market/en/news/european-commission-harmonise-last-pioneer-frequency-band-needed-5g-deployment>, Mayo 2019.
- [4] Gobierno de España. Cuadro nacional de atribución de frecuencias 2017. https://avancedigital.gob.es/espectro/CNAF/tablas_2017.pdf.
- [5] U.S. Navy. *Navy Electricity and Electronics Training Series Module 18-Radar Principles*. Center for Surface Combat Systems (CSCS), 2013. pág. 86.
- [6] Carlos A. Leal-Sevillano, José R. Montejo-Garai, Jesús M. Rebollar, Jorge A. Ruiz Cruz. Cad for dual-band polarizers in corrugated rectangular waveguide. *Proceedings of the 41st European Microwave Conference*, 2011. págs. 1-3.
- [7] <https://www.cst.com/products/csts2>.
- [8] Robert E. Collin. *Field Theory of Guided Waves*. McGraw-Hill, York, Pensilvania, EEUU, 1960.
- [9] D. Fleisch. *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2011.
- [10] Jorge A. Ruiz Cruz. Anexo II. sistemas de coordenadas y expresiones del operador nabla. Material de la asignatura "Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas" del Grado en Tecnologías y Servicios de Telecomunicación Escuela Politécnica Superior de la Universidad Autónoma de Madrid.
- [11] Sazonov V.P. Silin R.A. *Slow-down Systems*. Soviet Radio, Moscú, Rusia, 1966.
- [12] S. L. Prosvirnin N. G. Kolmakova, A. A. Kirilenko. Plane chiral diaphragms in a square waveguide and manifestations of optical activity. *Radio Physics and Radio Astronomy*, 2011. págs. 70-81.
- [13] C. A. Balanis. *Antenna Theory. Analysis and Design*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, Nueva Jersey, EEUU, 1997.
- [14] Jorge A. Ruiz Cruz. Tema III.5. polarización del campo electromagnético. Material de la asignatura "Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas" del Grado en Tecnologías y Servicios de Telecomunicación de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Autónoma de Madrid.

- [15] Stefano Selleri Giuseppe Pelosi, Roberto Coccioli. *Quick Finite Elements for Electromagnetic Waves*. Artech House, Inc., Norwood, Maryland, EEUU, 2009.
- [16] Robert E. Collin. *Foundations for Microwave Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, EEUU, 2001.
- [17] Jorge A. Ruiz Cruz. Tema IV.3. definición de la matriz de parámetros s. significado físico de los parámetros s y sus propiedades. Material de la asignatura "Medios de Transmisión" del Grado en Tecnologías y Servicios de Telecomunicación de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Autónoma de Madrid.
- [18] <https://www.miweko.de/de/produkte/hohlleiter/passive-waveguide-components-2>.
- [19] <https://quinstar.com/shop/waveguides-related-products/circular-waveguides/circular-waveguide-sections-and-flanges-qcw/>.
- [20] <https://interferencetechnology.com/recent-improvements-on-dual-ridged-horn-antennas/>.
- [21] <https://www.minicircuits.com/WebStore/dashboard.html?model=BBP-10.7%2B>.
- [22] Ana Morán-López, Juan Córcoles, Jorge A. Ruiz-Cruz, José R. Montejo-Garai, Jesús M. Rebollar. Dual-mode filters in equilateral triangular waveguides with wide spurious-free response. *IEEE MTT-S International Microwave Symposium (IMS)*, 2017. págs. 1192-1195.
- [23] Ana Morán-López, Juan Córcoles, Jorge A. Ruiz-Cruz, José R. Montejo-Garai, Jesús M. Rebollar. Electromagnetic scattering at the waveguide step between equilateral triangular waveguides. *Advances in Mathematical Physics Volume 2016*, 2016. Article ID 2974675, 16 pages.
- [24] Juan Córcoles, Ana Morán-López, Jorge A. Ruiz-Cruz. Nested 2d finite-element function-spaces formulation for the mode-matching problem of arbitrary cross-section waveguide devices. *Applied Mathematical Modelling* 60, 2018. págs. 286-299.
- [25] Carlos A. Leal-Sevillano, Jorge A. Ruiz Cruz, José R. Montejo-Garai, Jesús M. Rebollar. Dual-band bi-phase waveguide polarizer for a novel feeder network without orthomode transducer. *Proceedings of the 43rd European Microwave Conference*, 2013.
- [26] A. A. Kirilenko, N.G. Kolmakova, S.A. Prikolotin. Ultra-compact 90 deg twist based on a pair of two closely placed flat chiral irises. *Radioelectronics and Communications Systems Vol. 55*, 2012. págs. 175-177.
- [27] Nataliya Kolmakova, Sergey Prikolotin, Anatoliy Kirilenko, Andrey Perov. Simple example of polarization plane rotation by the fringing fields interaction. *Proceedings of the 43rd European Microwave Conference*, 2013. págs. 1-3.
- [28] Nataliya Kolmakova, Sergey Prikolotin, Andrey Perov, Vadim Derkach, and Anatoliy A. Kirilenko. Polarization plane rotation by arbitrary angle using d4 symmetrical structures. *IEEE Transactions on Microwave Techniques, Vol 64*, 2016. págs. 429-435.
- [29] A. A. Kirilenko, Sergiy O. Steshenko, Vadim N. Derkach, Yevhenii M. Ostryzhnyi. A tunable compact polarizer in a circular waveguide. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 67*, 2019. págs. 592-596.



Caso general de la polarización circular

Este caso general parte de la premisa de que no se puede separar el campo \vec{E}_0 de forma trivial en partes real e imaginaria, caso muy común en los análisis reales y que no se contemplaba en la sección 2.4. El objetivo es hacer un cambio coordenadas que dé tal separación en dichas componentes. Se parte de

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_r + j\vec{E}_i, \quad (\text{A.1})$$

donde el sufijo r indica real e i imaginaria. Se define el vector

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 = Me^{j2\Psi}. \quad (\text{A.2})$$

Identificando términos se llega a:

$$M = |\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0|, \quad (\text{A.3})$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \angle (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2\vec{E}_r \cdot \vec{E}_i}{\vec{E}_r \cdot \vec{E}_r - \vec{E}_i \cdot \vec{E}_i}. \quad (\text{A.4})$$

Por otro lado se define un vector \vec{b} tal que:

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + j\vec{b}_2 = \vec{E}_0 e^{j\Psi}, \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{b}_1 = \Re(\vec{b}) = \vec{E}_r \cos(\Psi) + \vec{E}_i \sin(\Psi), \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{b}_2 = \Im(\vec{b}) = -\vec{E}_r \sin(\Psi) + \vec{E}_i \cos(\Psi). \quad (\text{A.7})$$

Esta es una rotación del campo un ángulo Ψ en el plano complejo, por lo que ambas representaciones del campo son equivalentes. Además, \vec{b}_1 y \vec{b}_2 tienen a primera vista las propiedades que se buscan de separar el campo en componentes real e imaginaria. Si se calcula el producto escalar de este vector se llega a:

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 e^{j2\Psi} = Me^{-j2\Psi} e^{j2\Psi} = M. \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 - \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 + 2j\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2. \quad (\text{A.9})$$

Ahora se trata de identificar términos en las dos expresiones anteriores:

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{1}{2} \Im \left(\vec{b} \cdot \vec{b} \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

De esto se deduce que \vec{b}_1 y \vec{b}_2 son ortogonales. Además se da que:

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 - \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = M > 0, \quad (\text{A.11})$$

por tanto $|\vec{b}_1| \geq |\vec{b}_2|$.

Se ha conseguido de esta forma, separar el campo en dos componentes ortogonales geométricas que son respectivamente real e imaginaria puras. Por tanto, la elipse de polarización análoga a la que se definió en la sección 2.4 es:

$$\left(\frac{E_{b1}}{|\vec{b}_1|} \right)^2 + \left(\frac{E_{b2}}{|\vec{b}_2|} \right)^2 = 1. \quad (\text{A.12})$$

Si $|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2|$ entonces la polarización es circular. Recordando que $\vec{b}_1 \geq \vec{b}_2$, la relación axial debe ser:

$$ar = \frac{|\vec{b}_1|}{|\vec{b}_2|}. \quad (\text{A.13})$$

B

Descripción de la guía coaxial

B.1. Modos TE y TM

En el caso de la guía coaxial (figura B.1) se da la siguiente función generatriz para los modos $TE^{c,s}$:

$$\psi_{h,mn} = [A J_n(k_{c,mn}r) + B Y_n(k_{c,mn}r)] \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \quad b \leq r \leq a; 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (B.1)$$

donde Y_n es la función de Bessel de segunda especie. Las constantes A y B son números reales que simbolizan unas amplitudes que varían dependiendo de los modos y se calculan para cada uno de ellos imponiendo las condiciones de contorno (ver [1],[8] para más detalles).

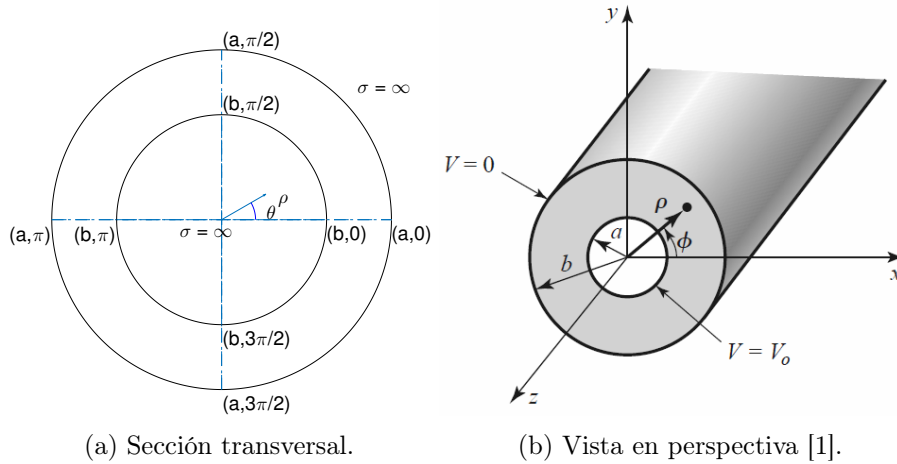
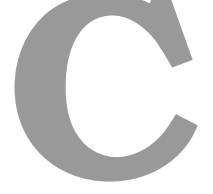


Figura B.1: Guía coaxial.

Para los modos $TM^{c,s}$ se tiene:

$$\psi_{e,mn} = [A J_n(k_{c,mn}\rho) + B Y_n(k_{c,mn}\rho)] \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \quad b \leq \rho \leq a; 0 \leq \theta < 2\pi \quad (\text{B.2})$$

Se puede observar que en ambos casos los términos de las funciones de Bessel no dependen del ángulo (tienen simetría radial), por lo que se puede decir que en estas guías observaremos las mismas paredes en los ejes que las que se habían visto en las guías circulares (tablas 3.2 y 3.3). Cabe destacar que la guía coaxial tiene un modo TEM con simetría radial (y, por tanto, PMW en los dos ejes). Un ejemplo de dispositivo en coaxial se muestra en la figura 2.6d.



Desarrollos teóricos adicionales

C.1. Desarrollo de sim. en modos TM para la guía cuadrada

Este apartado es una continuación de 4.3.1, y parte de:

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{n_1\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n_1\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_1\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{m_1\pi}{2}\right) + \\ & A \sin\left(\frac{n_2\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n_2\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_2\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{m_2\pi}{2}\right) = \\ & \sin\left(\frac{-n_1\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{n_1\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_1\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{m_1\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}} + \\ & A \sin\left(\frac{-n_2\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{n_2\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m_2\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{m_2\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}}. \end{aligned}$$

Haciendo $n_1 = m_2 = r$ y $m_1 = n_2 = s$ se pueden igualar términos:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{r\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) = A \sin\left(\frac{-s\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{r\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) e^{\frac{-j2\pi q}{4}} \\ A \sin\left(\frac{s\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{-r\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{s\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) e^{\frac{-j2\pi q}{4}}. \end{cases}$$

Lo cual se simplifica hasta obtener:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) = A \sin\left(\frac{-s\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}} \\ \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) = A^{-1} \sin\left(\frac{-r\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}}. \end{cases} \quad (C.1)$$

Hay que contemplar, en principio, cuatro posibilidades según r y s sean números pares o impares. Si se da r par y s par:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}} \\ \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A^{-1} \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (C.2)$$

Este sistema se cumple para $A = +1$ y $q = 2$ o $A = -1$ y $q = 0$.

Si r y s son impares:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}} \\ \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A^{-1} \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Este sistema se cumple para $A = +1$ y $q = 0$ o $A = -1$ y $q = 2$.

Se estudia ahora el caso r impar y s par.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}} \\ \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A^{-1} \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Este sistema se cumple para $A = +j$ y $q = -1$ o $A = -j$ y $q = 1$.

Por último, el caso de r par y s impar:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}} \\ \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A^{-1} \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

En este sistema debemos tener $A = -j$ y $q = 1$ o $A = +j$ y $q = -1$.

C.2. Desarrollo de sim. en modos TE para la guía cuadrada

Este apartado es continuación de la sección 4.3.2. Para los modos TE tenemos la siguiente función generadora del campo \vec{H} .

$$\psi_h(x, y) = \cos\left(\frac{n\pi x}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi}{2}\right) \quad \begin{cases} -a/2 < x < a/2 \\ -a/2 < y < a/2. \end{cases}$$

En coordenadas polares:

$$\psi_h(\rho, \theta) = \cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{m\pi}{2}\right) \quad \begin{cases} -a/2 < \rho\cos\theta < a/2 \\ -a/2 < \rho\sin\theta < a/2. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Se evalúa la ecuación en $\theta' = \theta + 2\pi/4$, llegando a:

$$\psi_h\left(\rho, \theta + \frac{2\pi}{N}\right) = \cos\left(\frac{-n\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi\rho\cos\theta}{a} + \frac{m\pi}{2}\right). \quad (\text{C.7})$$

El caso $n = m$ y n par es el siguiente:

$$\cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = \cos\left(\frac{-n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) e^{\frac{-2\pi q}{4}}. \quad (\text{C.8})$$

La ecuación se cumple para $q = 0$ dado que el coseno es una función par.

Si se da $n = m$ y n impar.

$$\sin\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = \sin\left(\frac{-n\pi\rho\sin\theta}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\rho\cos\theta}{a}\right) e^{\frac{-2\pi q}{4}}. \quad (\text{C.9})$$

Puesto que el seno es una función impar, la ecuación se cumple solo para $q = 2$. Ahora se evalúa la suma de funciones generadoras; siguiendo un desarrollo similar al que se hizo para los modos TM se llega a:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) = A \cos\left(\frac{-s\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{s\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}} \\ \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) = A^{-1} \cos\left(\frac{-r\pi\rho\sin\theta}{a} + \frac{r\pi}{2}\right) e^{\frac{j2\pi q}{4}}. \end{cases} \quad (C.10)$$

Si r y s son pares:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}} \\ \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A^{-1} \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (C.11)$$

Se cumple para $A = +1$ y $q = 0$ o $A = -1$ y $q = 2$.

Si r y s son impares:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{-j\pi q}{2}} \\ \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A^{-1} \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{-j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (C.12)$$

Se cumple el sistema para $A = 1$ y $q = 2$ o $A = -1$ y $q = 0$.

El caso de r impar y s par es el siguiente:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A \cos\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}} \\ \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A^{-1} \sin\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (C.13)$$

Se verifica para $A = j$ y $q = -1$ o $A = -j$ y $q = 1$.

Por último, el caso r par y s impar:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = -A \sin\left(\frac{s\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}} \\ \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) = A^{-1} \cos\left(\frac{r\pi\rho\sin\theta}{a}\right) e^{\frac{j\pi q}{2}}. \end{cases} \quad (C.14)$$

Aquí si A es j , $q = 1$ o si $A = -j$, $q = -1$. A continuación un cuadro resumen.

q	Combinaciones 1	Combinaciones 2
-1	$TE_{2r-1,2s} + jTE_{2s,2r-1}$	$TE_{2r,2s-1} - jTE_{2s-1,2r}$
0	$TE_{2r,2s} + TE_{2s,2r}$	$TE_{2r-1,2s-1} - TE_{2s-1,2r-1}$
1	$TE_{2r,2s-1} + jTE_{2s-1,2r}$	$TE_{2r-1,2s} - jTE_{2s,2r-1}$
2	$TE_{2r-1,2s-1} + TE_{2s-1,2r-1}$	$TE_{2r,2s} - TE_{2s,2r}$

Cuadro C.1: Combinaciones de modos TE con simetría C_4 .

Se observa que, de nuevo, los resultados para $m = n$ están contenidos en la primera columna si hacemos $r = s$.

C.3. Desarrollo del caso $m = n$ para modos TM en guía triangular

Este apartado desarrolla el caso particular de $m = n$ para los modos TM en guía triangular, referido en la sección 4.4.1.

C.3.1. Modos TM_{nn}^S

Los modos TM_{nn}^S se generan a partir de la siguiente función, ya simplificada:

$$\psi_e^S = \sin\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right)\cos\left(\frac{3n\pi}{\sqrt{3}b}x\right).$$

En polares:

$$\psi_e^S = \sin\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right)\cos\left(\frac{3n\pi}{\sqrt{3}b}\rho\cos\theta\right). \quad (\text{C.15})$$

De la misma forma que se hizo para los modos TE_{nn}^S , se desarrolla el producto de funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned} \psi_e^S(\rho, \theta) = & \sin\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) + \\ & \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right) - \frac{2b}{3}\right)\right) + \\ & \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta\right) - \frac{2b}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Y se evalúa en $\theta' = \theta + 2\pi/3$.

$$\begin{aligned} \psi_e^S\left(\rho, \theta' = \theta + \frac{2\pi}{3}\right) = & \sin\left(\frac{-n\pi}{b}\left(\rho\left(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\right) - \frac{4b}{3}\right)\right) + \\ & \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(-2\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) + \\ & \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\left(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta\right) - \frac{2b}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Se llega a una expresión muy similar a la de los modos TE_{nn}^S . Puesto que también se cumple que $\sin(x) = \sin(x + 2\pi n)$, haciendo un desarrollo análogo al anterior se deriva la conclusión de que los modos TM_{nn}^S tienen simetría C_3 con $q = 0$.

C.3.2. Modos TM_{nn}^A

Por último, se evalúa la función generadora de los modos TE_{nn}^A .

$$\begin{aligned} \psi_e^A = & \sin\left(\frac{-2n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{0\pi}{\sqrt{3}b}x\right) + \\ & \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{3n\pi}{\sqrt{3}b}x\right) + \\ & \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y - \frac{2b}{3}\right)\right)\sin\left(\frac{-3n\pi}{\sqrt{3}b}x\right) = 0. \end{aligned}$$

Como sucedía para los TE_{nn}^A , no existen tampoco en general los modos TM_{nn}^A .

C.4. Desarrollo del caso $m = n + 3l$ en la guía triangular

Este apartado es continuación de la sección 4.4.2. Se parte de la siguiente función:

$$\begin{aligned} \psi_h^S = & \cos\left(\frac{(-2n-3l)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{(3l)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + \\ & \cos\left(\frac{(n+3l)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{(3n+3l)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + \\ & \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{(-6l-3n)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right). \end{aligned}$$

Ahora se desarrollan los productos de cosenos para obtener un resultado con la siguiente forma:

$$\psi_h^S = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{b} (\rho (A_i \sin\theta + B_i \cos\theta) + C_i b)\right). \quad (\text{C.16})$$

Los coeficientes se muestran en forma de cuadro (C.2) para reducir el espacio y facilitar la legibilidad.

i	A_i	B_i	C_i
1	$-2n-3l$	$\sqrt{3}l$	$2(2n+3l)/3$
2	$-2n-3l$	$-\sqrt{3}l$	$2(2n+3l)/3$
3	$n+3l$	$\sqrt{3}(n+l)$	$-2(n+3l)/3$
4	$n+3l$	$-\sqrt{3}(n+l)$	$-2(n+3l)/3$
5	n	$\sqrt{3}(-2l-n)$	$-2n/3$
6	n	$-\sqrt{3}(-2l-n)$	$-2n/3$

Cuadro C.2: Coeficientes de ψ_h^S en θ .

La función en $\theta' = \theta + 2\pi/3$ tendrá el siguiente aspecto:

$$\psi_h^S = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{b} (\rho (A'_i \sin\theta + B'_i \cos\theta) + C'_i b)\right). \quad (\text{C.17})$$

Los coeficientes son ahora (cuadro C.3):

i	A'_i	B'_i	C'_i
1	n	$\sqrt{3}(-2l-n)$	$2(2n+3l)/3$
2	$n+3l$	$-\sqrt{3}(-n-l)$	$2(2n+3l)/3$
3	$-2n-3l$	$\sqrt{3}l$	$-2(n+3l)/3$
4	n	$-\sqrt{3}(2l+n)$	$-2(n+3l)/3$
5	$n+3l$	$\sqrt{3}(n+l)$	$-2n/3$
6	$-2n-3l$	$-\sqrt{3}l$	$-2n/3$

Cuadro C.3: Coeficientes de ψ_h^S en θ' .

Se observa cómo los términos en θ y θ' se podrían identificar dos a dos. Para que los C_i coincidan se vuelve a utilizar la propiedad $\cos(x) = \cos(x + 2\pi k)$. Las igualdades son las siguientes:

- $C_1 = C'_3$, aplicando $\cos(x) = \cos(x + 2\pi(n + 2l))$.
- $C_2 = C'_6$, aplicando $\cos(x) = \cos(x + 2\pi(n + l))$.
- $C_3 = C'_5$, aplicando $\cos(x) = \cos(x - 2\pi l)$.
- $C_4 = C'_2$, aplicando $\cos(x) = \cos(x - 2\pi(n + 2l))$.
- $C_5 = C'_1$, aplicando $\cos(x) = \cos(x - 2\pi(n + l))$.
- $C_6 = C'_4$, aplicando $\cos(x) = \cos(x + 2\pi l)$.

Con esto queda demostrado que los modos $TE_{(n+3l)n}^S$ tienen simetría C_3 con $q = 0$. Cabe destacar que este resultado se ha obtenido sin aplicar la propiedad de paridad de los cosenos.

El desarrollo que se ha hecho se podría realizar de forma análoga para las funciones generadoras de los modos $TE_{(n+3l)n}^A$, $TM_{(n+3l)n}^S$ y $TM_{(n+3l)n}^A$. En el caso de este último el desarrollo en cosenos sería idéntico. Para los otros dos casos la expresión tendría la forma:

$$\psi_{h,e}^{A,S} = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{b} (\rho(A_i \sin \theta + B_i \cos \theta) + C_i b)\right). \quad (\text{C.18})$$

Como se ha dicho, esto no influye puesto que no se utilizaron las propiedades de paridad en la demostración anterior.

En conclusión, todos los modos $(n + 3l), n$ en guía triangular tienen simetría C_3 con $q = 0$.

C.5. Desarrollo del caso general de la guía triangular

Este apartado desarrolla el caso general de la guía triangular enunciado en 4.4.2. Se parte de:

$$\begin{aligned} \psi_h = & \cos\left(\frac{(-2n-3l+k)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{(3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + S\sin\left(\frac{(3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right) + \\ & \cos\left(\frac{(n+3l-k)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{(3n+3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + S\sin\left(\frac{(3n+3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right) + \\ & \cos\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{(-3n-6l+2k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + S\sin\left(\frac{(-3n-6l+2k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right). \end{aligned}$$

Lo reescribimos como una suma de funciones trigonométricas y hacemos $S = j$

$$\begin{aligned} \psi_h = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta + B_i\cos\theta) + C_ib)\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta + B_i\cos\theta) + C_ib)\right) \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta - B_i\cos\theta) + C_ib)\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta - B_i\cos\theta) + C_ib)\right) \right). \end{aligned}$$

Los coeficientes aparecen en la cuadro C.4.

i	A_i	B_i	C_i
1	$-2n-3l+k$	$\sqrt{3}(l-k/3)$	$2(2n+3l-k)/3$
2	$n+3l-k$	$\sqrt{3}(n+l-k/3)$	$-2(n+3l-k)/3$
3	n	$\sqrt{3}(-2l-n+2k/3)$	$-2n/3$

Cuadro C.4: Coeficientes de ψ_h en θ .

Ahora aplicamos a la expresión en θ' un producto por $e^{-j2\pi/3}$, es decir, $q = -1$. Recordemos que:

$$e^{-\frac{j2\pi}{3}} = \frac{1}{2}(-1 - j\sqrt{3}) \quad (\text{C.19})$$

Podemos reescribir el resultado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi_h = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \left(-\cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta + B'_i\cos\theta) + C'_{i1}b)\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta + B'_i\cos\theta) + C'_{i1}b)\right) \right) + \\ & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \left(-\cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta - B'_i\cos\theta) + C'_{i2}b)\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta - B'_i\cos\theta) + C'_{i2}b)\right) \right) + \\ & \frac{j}{4} \sum_{i=1}^3 \left(-\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta + B'_i\cos\theta) + C'_{i1}b)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta + B'_i\cos\theta) + C'_{i1}b)\right) \right) + \\ & \frac{j}{4} \sum_{i=1}^3 \left(-\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta - B'_i\cos\theta) + C'_{i2}b)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A'_i\sin\theta - B'_i\cos\theta) + C'_{i2}b)\right) \right). \end{aligned}$$

Cabe destacar que los coeficientes C'_i son diferentes para las expresiones « $x+y$ » respecto a los de las expresiones « $x-y$ » por la reorganización que ocurre al sustituir θ con θ' como ya sucedía en el caso $m = n + 3l$.

Reagrupamos aplicando las identidades del ángulo suma y resta:

$$\psi_h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A'_i \sin \theta + B'_i \cos \theta) + C'_{i1} b) - \frac{2\pi}{3} \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A_i \sin \theta + B_i \cos \theta) + C'_{i1} b) - \frac{2\pi}{3} \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A'_i \sin \theta - B'_i \cos \theta) + C'_{i2} b) + \frac{2\pi}{3} \right) - j \sin \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A_i \sin \theta - B_i \cos \theta) + C'_{i2} b) + \frac{2\pi}{3} \right) \right).$$

i	A'_i	B'_i	C'_{i1}	C'_{i2}
1	n	$\sqrt{3}(-2l - n + 2k/3)$	$2(2n + 3l - k)/3$	$-2(n + 3l - k)/3$
2	$n + 3l - k$	$\sqrt{3}(n + l - k/3)$	$-2n/3$	$2(2n + 3l - k)/3$
3	$-2n - 3l + k$	$\sqrt{3}(l - k/3)$	$-2(n + 3l - k)/3$	$-2n/3$

Cuadro C.5: Coeficientes de ψ_h en $\theta + 2\pi/3$.

Los coeficientes se recogen en la cuadro C.5. Se ha llegado a una suma de cosenos y senos con un aspecto muy similar a la original. Podemos identificar los primeros dos coeficientes directamente e independientemente del valor de k . Solo queda ver bajo qué condiciones los términos independientes son iguales; para ello los restamos e identificamos el valor de k para que el resultado sea un múltiplo de 2π . La notación es la siguiente: $x(') \pm$, donde x es el índice del término y \pm hace referencia a que el argumento de la función trigonométrica sea $x + y$ o $x - y$.

- $(1+, 3'+): \frac{2\pi}{3}(2n + 3l - k) + \frac{2\pi}{3}(n + 3l - k + 1) = 2\pi(n + 2l) + \frac{2\pi}{3}(2k - 1) \rightarrow k = 2$.
- $(1-, 3'-): \frac{2\pi}{3}(2n + 3l - k) + \frac{2\pi}{3}(n - 1) = 2\pi(n + l) + \frac{2\pi}{3}(-k - 1) \rightarrow k = 2$.
- $(2+, 2'+): \frac{2\pi}{3}(-n - 3l + k) + \frac{2\pi}{3}(n + 1) = 2\pi(-3l) + \frac{2\pi}{3}(k + 1) \rightarrow k = 2$.
- $(2-, 2'-): \frac{2\pi}{3}(-n - 3l + k) + \frac{2\pi}{3}(-2n - 3l + k - 1) = 2\pi(-n - 2l) + \frac{2\pi}{3}(2k - 1) \rightarrow k = 2$.
- $(3+, 1'+): \frac{2\pi}{3}(-n) + \frac{2\pi}{3}(-2n - 3l + k + 1) = 2\pi(-n - l) + \frac{2\pi}{3}(k + 1) \rightarrow k = 2$.
- $(3-, 1'-): \frac{2\pi}{3}(-n) + \frac{2\pi}{3}(n + 3l - k - 1) = 2\pi(3l) + \frac{2\pi}{3}(-k - 1) \rightarrow k = 2$.

Se ha demostrado que la ecuación se cumple para $k = 2$, es decir, los modos $TE_{n+3l-2,n}^S + jTE_{n+3l-2,n}^A$ tienen simetría C_3 con $q = -1$. Si hiciéramos el desarrollo con factor de suma $B = -j$, llegaríamos al reagrupar a la siguiente ecuación:

$$\psi_h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A_i \sin \theta + B_i \cos \theta) + C'_{i1} b) + \frac{2\pi}{3} \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A_i \sin \theta + B_i \cos \theta) + C'_{i1} b) + \frac{2\pi}{3} \right) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A_i \sin \theta - B_i \cos \theta) + C'_{i2} b) - \frac{2\pi}{3} \right) - j \sin \left(\frac{\pi}{b} (\rho (A_i \sin \theta - B_i \cos \theta) + C'_{i2} b) - \frac{2\pi}{3} \right) \right).$$

Es fácil ver que en este caso la ecuación se cumplirá para $k = 1$, por lo que, por tanto, los modos $TE_{n+3l-1,n}^S - jTE_{n+3l-1,n}^A$ tienen simetría C_3 con $q = -1$. El cuadro resumen es el C.6.

q	Modos 1	Modos 2
-1	$TE_{n+3l-2,n}^S + jTE_{n+3l-2,n}^A$	$TE_{n+3l-1,n}^S - jTE_{n+3l-1,n}^A$
0	$TE_{n,n}^{A,S}$	$TE_{n+3l,n}^{A,S}$
1	$TE_{n+3l-1,n}^S + jTE_{n+3l-1,n}^A$	$TE_{n+3l-2,n}^S - jTE_{n+3l-2,n}^A$

 Cuadro C.6: Grupos de modos TE según su valor de q en la guía triangular.

Por último se analiza brevemente lo que sucedería con los modos TM , en concreto la suma $TM^S + jTM^A$. Se tendría, sustituyendo $m = n + 3l - k$:

$$\begin{aligned} \psi_e = & \sin\left(\frac{(-2n-3l+k)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{(3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + B\sin\left(\frac{(3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right) + \\ & \sin\left(\frac{(n+3l-k)\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{(3n+3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + B\sin\left(\frac{(3n+3l-k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right) + \\ & \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\rho\sin\theta - \frac{2b}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{(-3n-6l+2k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right) + B\sin\left(\frac{(-3n-6l+2k)\pi\rho\cos\theta}{\sqrt{3}b}\right)\right). \end{aligned}$$

Se ve que los coeficientes son, en cualquier caso, iguales. El desarrollo en suma de funciones trigonométricas quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi_e = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta + B_i\cos\theta) + C_ib)\right) + j \cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta + B_i\cos\theta) + C_ib)\right) \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\sin\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta - B_i\cos\theta) + C_ib)\right) - j \cos\left(\frac{\pi}{b}(\rho(A_i\sin\theta - B_i\cos\theta) + C_ib)\right) \right). \end{aligned}$$

Aquí se observa cómo los senos y cosenos invierten su posición respecto al caso de los modos TE . Esto no afecta a las deducciones para k , por tanto los resultados para los TM son iguales.

C.6. Guía circular como C_4

Este apartado extiende la sección 4.5.2. Se parte de la guía de onda circular, cuya función generatriz es, para los modos TE :

$$\psi_h = J_n(k_c\rho) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq a; 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (C.20)$$

Se evalúa en $\theta' = \theta + 2\pi/4$. Esto es también de utilidad a la hora de analizar el comportamiento de un dispositivo posterior:

$$\psi_h = J_n(k_c\rho) \begin{cases} \sin(n\theta)\cos\left(\frac{2\pi n}{4}\right) + \cos(n\theta)\sin\left(\frac{2\pi n}{4}\right) \\ \cos(n\theta)\cos\left(\frac{2\pi n}{4}\right) - \sin(n\theta)\sin\left(\frac{2\pi n}{4}\right) \end{cases}. \quad (C.21)$$

Evalutando la primera línea:

$$\psi_h = J_n(k_c\rho) \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin(n\theta) & n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(n\theta) & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (C.22)$$

Y la segunda:

$$\psi_h = J_n(k_c \rho) \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(n\theta) & n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(n\theta) & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Por tanto para n par:

$$\psi_h = J_n(k_c \rho) \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin(n\theta) \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cos(n\theta). \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Lo cual quiere decir que los modos con $n = 0, 4, 8, \dots$, son C_4 con $q = 0$ y los de $n = 2, 6, 10, \dots$ son C_4 con $q = 2$. Los de n impar:

$$\psi_h = J_n(k_c \rho) \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(n\theta) \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(n\theta). \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

No se pueden cumplir simultáneamente para $q = 0$ o $q = 2$. Hay que evaluar una suma de modos desfasados j . La ecuación es la siguiente:

$$J_n(k_c \rho) (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) = \left((-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(n\theta) + j (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(n\theta) \right) e^{\frac{-2\pi q}{4}}. \quad (\text{C.26})$$

Se puede ver que se cumple para $q = -1$ si $n = 4l + 1$ o para $q = +1$ si $n = 4l + 3$. Se evalúa el último caso.

$$J_n(k_c \rho) (\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)) = \left((-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin(n\theta) - j (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(n\theta) \right) e^{\frac{-2\pi q}{4}}. \quad (\text{C.27})$$

Aquí sucede lo contrario, como cabía esperar: para $n = 4l + 1$ necesitamos $q = 1$ y para $n = 4l + 3$ la ecuación se cumple si $q = -1$.

En conclusión (tabla C.7):

q	Modos 1	Modos 2
-1	$TE_{m,4l+1}^c + jTE_{m,4l+1}^s$	$TE_{m,4l+3}^c - jTE_{m,4l+3}^s$
0	$TE_{m,4l}^s$	$TE_{m,4l}^c$
1	$TE_{m,4l+3}^c + jTE_{m,4l+3}^s$	$TE_{m,4l+1}^c - jTE_{m,4l+1}^s$
2	$TE_{m,4l+2}^s$	$TE_{m,4l+2}^c$

Cuadro C.7: Combinaciones de modos TE en guía circular estudiada como C_4 .

C.6.1. Modos TM

La función generadora de los modos TM es la siguiente:

$$\psi_e = J_n(k'_c \rho) \begin{cases} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq a; 0 \leq \theta < 2\pi \quad (\text{C.28})$$

La única diferencia está en el argumento de la función de Bessel, que en cualquier caso tiene simetría de rotación puesto que no depende de θ . Por tanto, todo el desarrollo que se ha realizado para los modos TE es idéntico para los TM (cuadro C.7).



Ortogonalidad de las combinaciones de modos

D.1. Obtención de la condición de ortogonalidad de los modos C_N

Este Anexo desarrolla la demostración sobre la ortogonalidad de las combinaciones de modos referida en la sección 4.6. Los campos de los modos TE y TM deben ser ortogonales, como ya se explicó en el capítulo 2.1. Se parte de esta igualdad, ya probada para los modos originales en [8]:

$$\iint_S \psi_i \psi_j^* dS = 0; \quad i \neq j, \quad (D.1)$$

donde S es la superficie transversal de la guía.

También se puede demostrar que si desaparece la siguiente integral entonces dos modos TM son ortogonales:

$$\iint_S \nabla_t \psi_i \cdot \nabla_t \psi_j^* dS. \quad (D.2)$$

Para los modos TE la integral que debe desaparecer pasa a ser:

$$\iint_S (\hat{a}_s \times \nabla_t \psi_i) \cdot (\hat{a}_s \times \nabla_t \psi_j^*) dS, \quad (D.3)$$

donde \hat{a}_s es el vector normal a la superficie S . No obstante esta expresión puede ser simplificada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\hat{a}_s \times \nabla_t \psi_i) \cdot (\hat{a}_s \times \nabla_t \psi_j^*) &= \hat{a}_s \cdot (\nabla_t \psi_i \times (\hat{a}_s \times \nabla_t \psi_j^*)) = \\ \hat{a}_s \cdot ((\nabla_t \psi_i \cdot \nabla_t \psi_j^*) \hat{a}_s - (\nabla_t \psi_i \cdot \hat{a}_s) \nabla_t \psi_j^*) &= \nabla_t \psi_i \cdot \nabla_t \psi_j^*. \end{aligned}$$

Puesto que $\hat{a}_s \cdot \nabla_t \psi_i = 0$ al ser perpendiculares entre sí. Esto quiere decir que se puede evaluar la expresión (D.2) tanto para los modos TE como los TM .

Dado que los nuevos modos que se han obtenido para las guías son combinaciones de modos originales, en este trabajo se ha procedido a probar que son ortogonales para garantizar que forman una base de modos con características similares a la anterior. En el caso de las guías

C_2 no había combinaciones de modos, y por tanto no es necesario comprobar su ortogonalidad. Cuando se da una pareja de modos con factor de suma R hay que analizar:

$$\iint_S \nabla_t (\psi_i + R\psi_j) \cdot \nabla_t (\psi_i - R\psi_j)^* dS = \iint_S \nabla_t (\psi_i + R\psi_j) \cdot \nabla_t (\psi_i - R^*\psi_j) dS, \quad (D.4)$$

puesto que a partir de este punto $\psi_{i,j}$ son funciones reales. Si lo desarrollamos llegamos a:

$$\iint_S (\nabla_t \psi_i \cdot \nabla_t \psi_i + (R - R^*) \nabla_t \psi_i \cdot \nabla_t \psi_j - |R| \nabla_t \psi_j \cdot \nabla_t \psi_j) dS. \quad (D.5)$$

Ahora se aplica a cada término la igualdad:

$$\iint_S \nabla_t \psi_i \cdot \nabla_t \psi_j dS = - \iint_S \psi_i \nabla_t^2 \psi_j dS + \oint_C \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dl, \quad (D.6)$$

donde C es el contorno de la guía. El segundo término de esta ecuación desaparece en todos los casos dado que la función generadora en el contorno es siempre 0 para los modos TM y su derivada respecto de la normal es 0 para los TE . Para el primer término se puede sustituir $\nabla_t^2 \psi_j$ por $-k_c^2 \psi_j$ atendiendo a la ecuación de Hemholtz para los modos TE y TM . Por tanto, queda probar que:

$$\iint_S (k_{ci}^2 \psi_i^2 - |R| k_{cj}^2 \psi_j^2) dS = 0. \quad (D.7)$$

D.2. Guía cuadrada – C_4

En todos los casos se dan sumas de modos m, n con n, m . Las sumas eran $TE(M)_{m,n} \pm jTE(M)_{n,m}$ o $TE(M)_{m,n} \pm TE(M)_{n,m}$. Por tanto $|S| = 1$. Para los modos TE :

$$\int_0^a \int_0^a \left(\cos^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi y}{a} \right) - \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos^2 \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \right) dx dy = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0. \quad (D.8)$$

Los nuevos modos son ortogonales. Lo mismo sucede para los TM

$$\int_0^a \int_0^a \left(\sin^2 \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi y}{a} \right) - \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \right) dx dy = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0. \quad (D.9)$$

D.3. Guía triangular – C_3

Lo que se hace es calcular, tanto para los modos TE y TM :

$$\int_0^b \int_0^{(y-b)/\sqrt{3}} (\psi_{S,mn}^2 - \psi_{A,mn}^2) dx dy + \int_0^b \int_{(b-y)/\sqrt{3}}^0 (\psi_{S,mn}^2 - \psi_{A,mn}^2) dx dy. \quad (D.10)$$

Esta integral no es trivial, pero al hacer un análisis numérico se observa que la igualdad se cumple independientemente del valor de m y n (para $m = n$ no es válida la expresión anterior).



Resultados de simulaciones sobre varias guías

En este Anexo, referenciado en el apartado 4.7 se adjuntan los resultados del análisis de guías por valores de q , que pueden ser de interés para trabajos futuros y contienen varios comentarios acerca de los resultados.

E.1. Notación

Se ha compactado la notación llevando el factor de suma a los índices. Los modos están numerados según su nomenclatura concreta para los casos analíticos y por orden de propagación para el resto. La columna número indica en qué posición empieza a propagarse. El signo de q es coherente con el del factor de suma por líneas (superior, inferior). En paredes, M hace referencia al PMW y E a PEW. Si se indican dos, la primera corresponde al primer modo sumado y la segunda al segundo. La columna de pareja degenerada es redundante, pero hace hincapié en la dualidad de valores de q .

E.2. Guías C_2

Modos TE y TM en guía elíptica: $q = 0, 1$

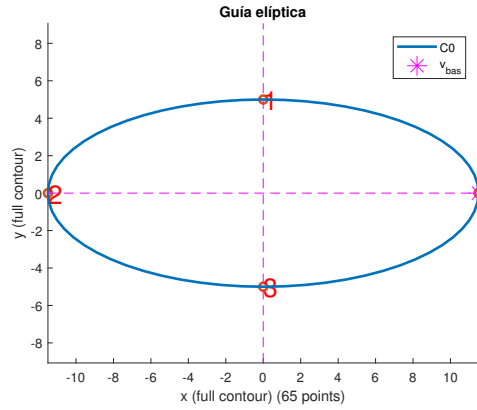


Figura E.1: Sección transversal de la guía elíptica

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$
1	TE_{11}^c	1	1	E	M
2	TE_{21}^c	0	1,83	E	E
3	TE_{11}^s	1	2,14	M	E
5	TE_{31}^c	1	2,65	E	M
6	TE_{21}^s	0	2,73	M	M
8	TE_{31}^s	1	3,36	M	E
9	TE_{41}^c	0	3,45	E	E
11	TE_{41}^s	0	4,02	M	M
12	TE_{01}^c	0	4,10	E	E
14	TE_{51}^c	1	4,25	E	M

Cuadro E.1: Modos TE en guía elíptica por frecuencia de corte.

Se observa cómo los modos que tienen ambas paredes eléctrica o magnética en ambos ejes pertenecen al grupo de $q = 0$ y los que tienen paredes diferentes pertenecen al grupo $q = 1$ tanto para los modos TE como TM . Este comportamiento es muy similar al de la guía rectangular antes estudiada analíticamente.

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$
4	TM_{01}^c	0	2,25	M	M
7	TM_{11}^c	1	2,89	M	E
10	TM_{21}^c	0	3,58	M	M
13	TM_{11}^s	1	4,14	E	M
15	TM_{31}^c	1	4,29	M	E

Cuadro E.2: Modos TM en guía elíptica por frecuencia de corte.

E.3. Guías C_3

E.3.1. Modos TE y TM en guía triangular equilátera

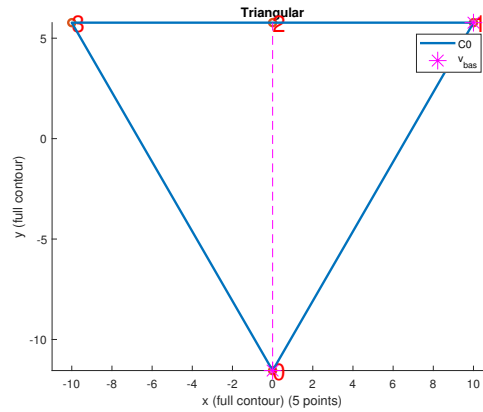


Figura E.2: Sección transversal de la guía triangular

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $x = 0$	Pareja deg.
1 – 2	$TE_{10}^{A\pm jS}$	± 1	1	M-E	Sí
3	TE_{11}^S	0	1,73	EV	No
5 – 6	$TE_{20}^{A\pm jS}$	∓ 1	2	M-E	Sí
7 – 8	$TE_{21}^{A\pm jS}$	± 1	2,64	M-E	Sí
11	TE_{30}^A	0	3	M	No
12	TE_{30}^S	0	3	E	No
13	TE_{22}^S	0	3,46	E	No
15 – 16	$TE_{31}^{A\pm jS}$	∓ 1	3,61	M-E	Sí
19 – 20	$TE_{40}^{A\pm jS}$	± 1	4	M-E	Sí

Cuadro E.3: Modos TE en guía triangular por frecuencia de corte.

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $x = 0$	Pareja deg.
4	TM_{11}^S	0	1,73	M	No
9 – 10	$TM_{21}^{S\pm jA}$	∓ 1	2,64	M-E	Sí
14	TM_{22}^S	0	3,46	M	No
17 – 18	$TM_{31}^{S\pm jA}$	± 1	3,61	M-E	Sí

Cuadro E.4: Modos TM en guía triangular por frecuencia de corte.

Aunque en estas tablas no se indica explícitamente, en los modos que cumplen la condición para $q = 0$ hay paredes eléctrica o magnética en todos los ejes de simetría de la estructura. Esto ocurre en general para todos los modos que cumplen esta condición independientemente de la geometría de la guía.

E.3.2. Modos TE y TM en guía triangular recortada (equilátera)

La figura E.3 es la guía triangular recortada con ranuras de dimensiones $0,2 \times 0,1$ respecto a la longitud del lado del triángulo y un desplazamiento relativo de $-0,075$ del lado izquierdo respecto del centro de los ejes de simetría.

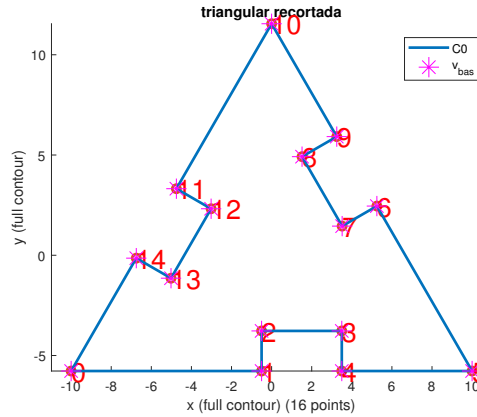


Figura E.3: Sección transversal de la guía triangular recortada

Número	Modo	q	f_c relativa	Pareja deg.
1 – 2	$TE_{1\pm j2}$	± 1	1	Sí
3	TE_3	0	1,90	No
4 – 5	$TE_{4\pm j5}$	∓ 1	2,49	Sí
7	TE_6	0	3,24	No
8 – 9	$TE_{7\pm j8}$	± 1	3,31	Sí
10	TE_9	0	3,54	No
13 – 14	$TE_{10\pm j11}$	± 1	3,93	Sí
16 – 17	$TE_{12\pm j13}$	± 1	4,55	Sí
18	TE_{14}	0	4,59	No

Cuadro E.5: Modos TE en guía triangular recortada por frecuencia de corte.

Número	Modo	q	f_c relativa	Pareja deg.
5	TM_1	0	2,80	No
11 – 12	$TM_{2\pm j3}$	∓ 1	3,76	Sí
15	TM_4	0	1,90	No
19 – 20	$TM_{5\pm j6}$	± 1	4,97	Sí

Cuadro E.6: Modos TM en guía triangular recortada por frecuencia de corte.

Aunque ahora no hay paredes eléctrica y magnética en la guía por no tener ejes de simetría, se obtienen una caracterización mediante los valores de q muy similar a la que se daban en la guía anterior. De hecho, en los primeros 20 modos que se propagan hay el mismo número de modos pertenecientes a cada grupo según el valor de q que cumplen.

E.4. Guías C_4

Modos TE y TM en guía cuadrada: $q = -1, 0, 1, 2$

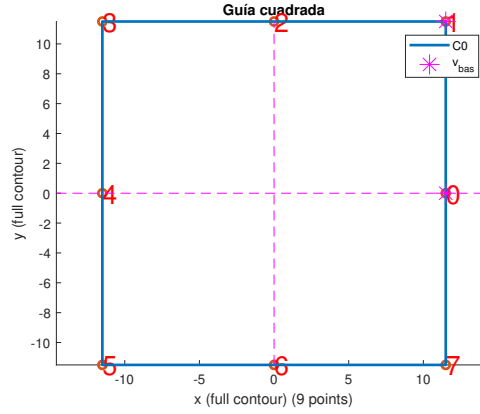


Figura E.4: Sección transversal de la guía cuadrada

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$	Pareja deg.
1 – 2	$TE_{10 \pm j01}$	∓ 1	1	E-M	M-E	Sí
3	TE_{11}	2	1,41	M	E	No
5 – 6	$TE_{20 \pm 02}$	0; 2	2	E-E	E-E	No
7 – 8	$TE_{21 \pm j12}$	± 1	2,24	M-E	E-M	Sí
11	TE_{22}	0	2,82	E	E	No
13 – 14	$TE_{30 \pm j03}$	∓ 1	3	E-M	M-E	Sí
15 – 16	$TE_{31 \pm 13}$	2; 0	3,16	M-M	M-M	Sí
19 – 20	$TE_{32 \pm j23}$	∓ 1	3,60	E-E	M-M	Sí

Cuadro E.7: Modos TE en guía cuadrada por frecuencia de corte.

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$	Pareja deg.
4	TM_{11}	0	1,41	M	M	No
9 – 10	$TM_{21 \pm j12}$	∓ 1	2,24	M-E	E-M	Sí
12	TM_{22}	2	2,82	E	E	No
17 – 18	$TM_{31 \pm 13}$	0; 2	3,16	M-M	M-M	Sí
21 – 22	$TM_{32 \pm j23}$	± 1	3,60	E-E	M-M	Sí

Cuadro E.8: Modos TM en guía cuadrada por frecuencia de corte.

En este caso hay modos degenerados para los valores de $q = 0$ y $q = N/2$. Para este caso concreto podemos trazar un paralelismo entre grupos de q e índices de los modos. Las combinaciones par-impar e impar-par están en el grupo $q = \pm 1$ y las par-par e impar-impar están en el de $q = 0; 2$. Si ambos índices son idénticos solo habrá un modo con esa frecuencia de corte y, por tanto, pertenecerá a un solo grupo que puede ser 0 o 2 según sea TE o TM y la paridad de sus índices.

E.5. Guías C_5

Guía pentagonal: $q = -2, -1, 0, 1, 2$

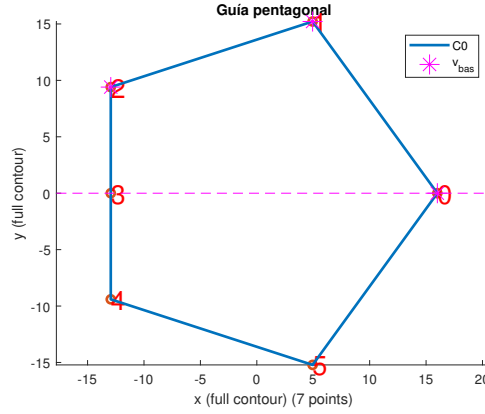


Figura E.6: Sección transversal de la guía pentagonal

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $x = 0$	Pareja deg.
1 – 2	$TE_{1\pm j2}$	± 1	1	M-E	Sí
4 – 5	$TE_{3\pm j4}$	± 2	1,60	E-M	Sí
6	TE_5	0	2,07	E	No
9 – 10	$TE_{6\pm j7}$	± 2	2,35	M-E	Sí
11 – 12	$TE_{8\pm j9}$	± 1	2,67	M-E	Sí
16 – 17	$TE_{10\pm j11}$	± 1	3,15	E-M	Sí
18	TE_{12}	0	3,21	E	No
21 – 22	$TE_{13\pm j14}$	± 2	3,57	E-M	Sí

Cuadro E.11: Modos TE en guía pentagonal por frecuencia de corte.

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $x = 0$	Pareja deg.
3	TM_1	0	1,35	M	No
7 – 8	$TM_{2\pm j3}$	± 1	2,15	M-E	Sí
13 – 14	$TM_{4\pm j5}$	± 2	2,86	M-E	Sí
15	TM_6	0	3,08	M	No
19 – 20	$TM_{7\pm j8}$	∓ 2	3,57	M-E	Sí

Cuadro E.12: Modos TM en guía pentagonal por frecuencia de corte.

En esta guía se observa cómo la información sobre las paredes eléctrica y magnética no es suficiente para determinar el valor de q , aunque podemos decir que si hay pared eléctrica o magnética en todos los ejes de simetría de un modo sin combinar, este pertenecerá al grupo $q = 0$. También sabemos que los modos degenerados que dan al sumarlos uno perteneciente al grupo $q = 1; 2$ tendrán respectivamente paredes eléctrica y magnética en uno de los ejes de simetría.

E.6. Guías C_6

Guía en polígono cóncavo, $q = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

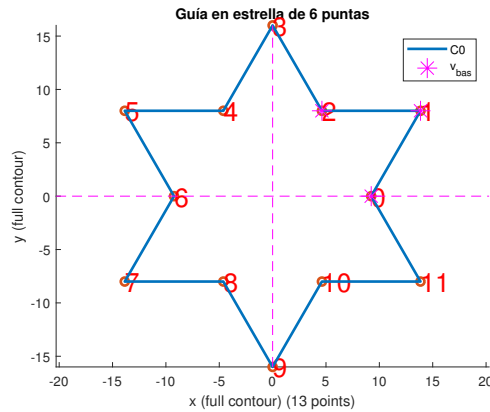


Figura E.7: Sección transversal de la guía de 6 lados

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$	Pareja deg.
1 – 2	$TE_{1\pm j2}$	± 1	1	M-E	E-M	Sí
3 – 4	$TE_{3\pm j4}$	∓ 2	1,45	M-E	M-E	Sí
5	TE_5	3	1,61	M	E	No
7	TE_6	0	2,04	E	E	No
10 – 11	$TE_{7\pm j8}$	∓ 1	2,54	E-M	M-E	Sí
12 – 13	$TE_{9\pm j10}$	∓ 2	2,92	M-E	M-E	Sí
14	TE_{11}	3	3,19	E	M	No
15	TE_{13}	0	3,19	E	E	No
18	TE_{12}	3	3,58	M	E	No

Cuadro E.13: Modos TE en guía en estrella de 6 puntas por frecuencia de corte.

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$	Pareja deg.
6	TM_1	0	1,61	M	M	No
8 – 9	$TM_{2\pm j3}$	∓ 1	2,54	M-E	E-M	Sí
16 – 17	$TM_{4\pm j5}$	∓ 2	3,34	E-M	E-M	Sí
19	TM_6	0	3,58	M	M	No
20	TM_7	3	3,80	E	M	No

Cuadro E.14: Modos TM en guía en estrella de 6 puntas por frecuencia de corte.

Como sucedía en guías con $N = 4$ nos encontramos con casos puntuales en los que los modos con $q = 0$ son degenerados con los de $q = N/2$; lo vemos en la tabla para el TE-11 y el TE-12. En este caso los modos que cumplen para $q = \pm 1$ se obtienen combinando aquellos que presentan paredes EH-MV con los que las tienen MH-EV. Para el caso $q = 2$ las combinaciones son del tipo EH-EV y MH-MV. Los que no son degenerados o no cumplen ninguna de estas condiciones deben pertenecer, por tanto, al grupo $q = 0$ si son EH-EV o MH-MV o al grupo $q = 3$ si son EH-MV o MH-EV.

E.7. Guías C_8

Guía octogonal, $q = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

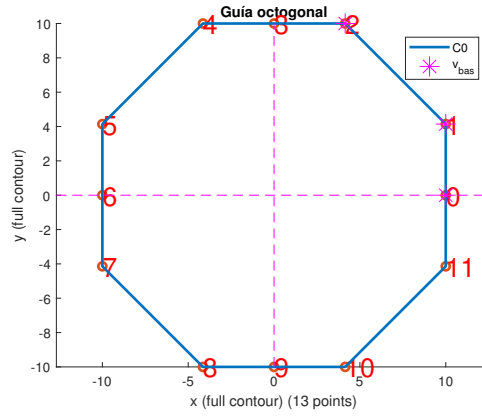


Figura E.8: Sección transversal de la guía octogonal

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$	Pareja deg.
1 – 2	$TE_{1\pm j2}$	∓ 1	1	E-M	M-E	Sí
4 – 5	$TE_{3\pm j4}$	± 2	1,65	M-E	M-E	Sí
6	TE_5	0	2,08	E	E	No
9 – 10	$TE_{6\pm j7}$	∓ 3	2,26	M-E	E-M	Sí
11	TE_8	4	2,72	M	M	No
14 – 15	$TE_{9\pm j10}$	∓ 1	2,89	E-M	M-E	Sí
17	TE_{11}	4	3,02	E	E	No
18 – 19	$TE_{12\pm j13}$	∓ 3	3,48	M-E	E-M	Sí

Cuadro E.15: Modos TE en guía octogonal por frecuencia de corte.

Número	Modo	q	f_c relativa	Pared $y = 0$	Pared $x = 0$	Pareja deg.
3	TM_1	0	1,31	M	M	No
7 – 8	$TM_{2\pm j3}$	± 1	2,10	E-M	M-E	Sí
12 – 13	$TM_{4\pm j5}$	± 2	2,81	M-E	M-E	Sí
16	TM_6	0	3,02	M	M	No
20 – 21	$TM_{7\pm j8}$	∓ 3	3,48	E-M	M-E	Sí

Cuadro E.16: Modos TM en guía octogonal por frecuencia de corte.

Para esta guía se observa cómo ya no es posible discernir entre los modos que dan $q = 1$ y $q = 3$ con la información solo en dos ejes de simetría.



Metodología de estudio de los dispositivos

Este Anexo busca aclarar la metodología que se ha seguido para obtener los parámetros S correspondientes a las combinaciones de modos, que aparecen extensivamente en el capítulo 5.

F.1. Parámetros S de combinaciones de modos

Para excitar los modos fundamentales según la relación que imponen las tablas que se obtuvieron en el capítulo 4, con $q \neq 0; N/2$, el procedimiento que se debe seguir es:

1. Excitar dos modos con amplitudes $1/\sqrt{2}$ y $j/\sqrt{2}$ o viceversa.
2. Escalar y agrupar los modos en las salidas de los puertos eléctricos correspondientes con amplitudes $1/\sqrt{2}$ y $j/\sqrt{2}$ y viceversa.

De esta forma se obtiene para la excitación de un modo con polarización circular (por ejemplo en sentido horario) una señal a la salida para una polarización con el mismo sentido de giro y el contrario.

$$s_{i,j} (TE(M)_{x \pm j(x+1)}, TE(M)_{y+j(y+1)}) = \frac{b_{TE(M)_x} \pm j b_{TE(M)_{x+1}}}{a_{TE(M)_y} + j a_{TE(M)_{y+1}}}. \quad (F.1)$$

La notación es $S_{ij} (B, A)$, donde i, j son los puertos físicos y B, A las nomenclaturas de los modos. B, A aparecen también compactados con una notación idéntica a la discutida en el anexo E.

Los modos que no requieren de combinaciones para tener simetría C_N no requieren de excitaciones especiales por tanto los resultados se pueden obtener combinando directamente los parámetros S que se derivan del análisis tradicional.

G

Discusión sobre el modificador de ángulo en guía circular

Este anexo extiende lo analizado en la sección 5.3. En el artículo [29] se propone el siguiente polarizador, que es el que se ha simulado en el software CST:

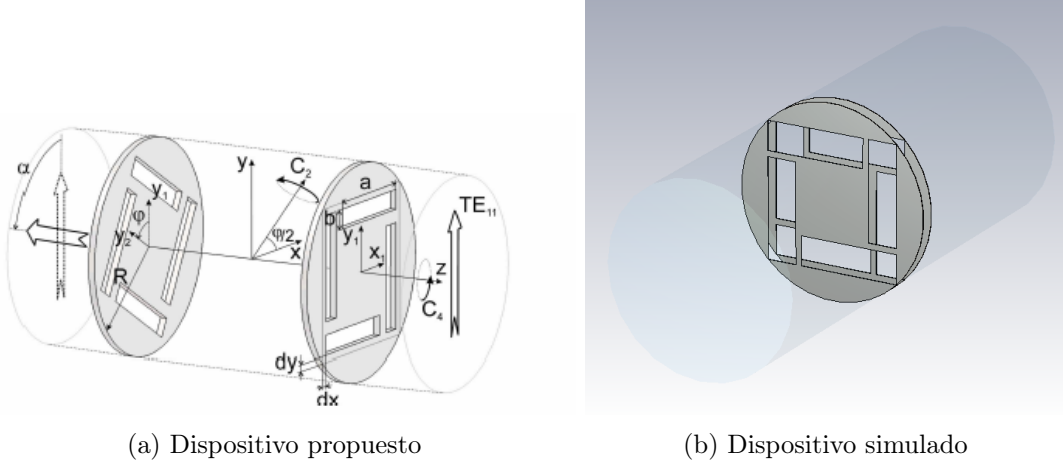


Figura G.1: Modificador del ángulo de polarización

Según este trabajo, el ángulo de polarización (curvas de nivel en la figura G.2) está calculado con la fórmula:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\Re \frac{S_{21}^{21}}{S_{11}^{21}} \right), \quad (G.1)$$

donde el índice superior es el de los puertos de entrada y salida y el inferior el de los modos por orden de propagación, es decir, del primero al segundo en el numerador y del primero al primero en el denominador.

Los resultados que se citan son los siguientes:

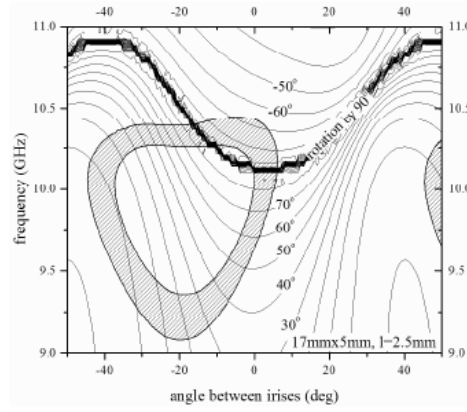


Figura G.2: Resultados recogidos en el artículo

Aplicando la fórmula propuesta anteriormente obtenemos las siguientes gráficas (figura G.3), para las mismas dimensiones de ranuras ($17mm \times 5mm$) y distancia entre láminas de $2,5mm$:

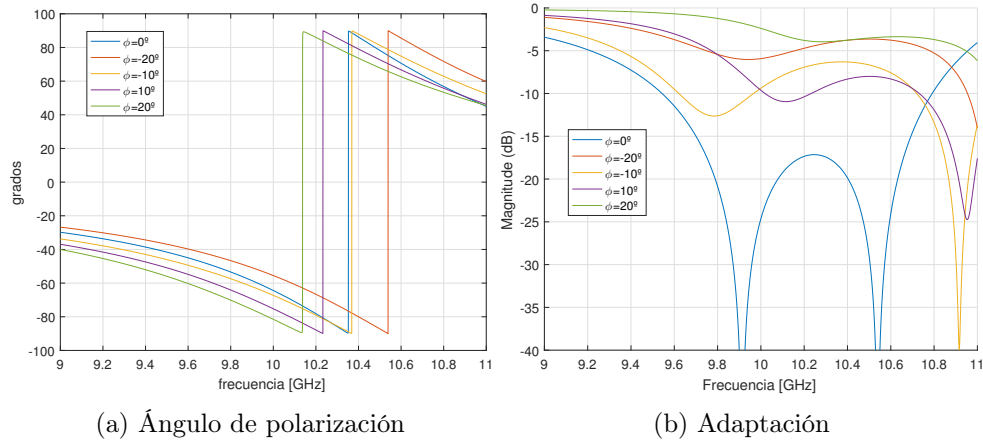


Figura G.3: Modificador del ángulo de polarización

Este resultado se corresponde solo en parte con el de la gráfica superior (G.2) puesto que el comportamiento no es simétrico respecto del ángulo entre íris $\phi = 0$. El segundo problema que se ha observado tiene que ver con la adaptación, que según los autores, es la sección en gris, con un rechazo de $20dB$. Se obtiene, sin embargo una reflexión que no coincide completamente para $\phi = 0$ grados y que se desplaza a frecuencias muy distintas para ángulos entre láminas de 10 y 20 grados.